

Máximos e Mínimos Relativos no Geogebra

Professora Fátima

Link para arquivo no Geogebra

1. Considere a função $f(x, y) = 12xy - 4x^2y - 3xy^2$ e esboce seu gráfico no GeoGebra. Abra a janela 3D para visualizá-lo.
 - (a) Coloque um ponto sobre o gráfico de f e chame-o de P . No campo de entrada digite $p1 = x(P)$. Tecle enter. Digite: $p2 = y(P)$. Tecle enter.
 - (b) Para buscarmos os candidatos a máximos e mínimos de uma função derivável com domínio em $\mathbf{R}$ e contradomínio em $\mathbf{R}$, derivamos a função e igualamos a derivada a zero. Numa função real com duas variáveis, o processo é análogo. Veremos que quando a derivada é nula em um ponto, o plano tangente ao gráfico da função neste ponto fica paralelo ao plano xy . Iniciaremos calculando a derivada de f em um ponto $p = (p_1, p_2)$ qualquer do domínio de f , e a denotaremos por Df_p . Assim $Df_p = \begin{pmatrix} f_x(p) & f_y(p) \end{pmatrix}$, onde f_x é a derivada de f em relação a x e f_y é a derivada de f em relação a y . Esta derivada pode ser escrita na notação de gradiente: $\nabla f = (f_x(p), f_y(p))$. Na janela de álgebra do GeoGebra, podemos digitar:

$$\begin{aligned}f_x &= \text{Derivada}(f, x) \\f_y &= \text{Derivada}(f, y)\end{aligned}$$

Como f_x e f_y são funções reais de duas variáveis, o GeoGebra exibe seus gráficos, para omiti-los desmarque as bolinhas a elas correspondentes na janela de álgebra.

- (c) A equação do plano tangente ao gráfico de uma função real de duas variáveis, relativa a um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ é dada por:

$$g(x, y) = f(p) + Df(p) \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix}$$

Ou alternativamente:

$$g(x, y) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p_1, y - p_2)$$

Repare que o que aparece no membro direito são as duas primeiras parcelas da fórmula de Taylor para a função real de duas variáveis. Assim, $f(p) = g(p)$ e $Df(p) = Dg(p)$.

- (d) Para visualizar o plano tangente em ao gráfico de f , em P no GeoGebra, digite:

$$g(x, y) = f(p1, p2) + (f_x(p1, p2), f_y(p1, p2)) \cdot (x - p1, y - p2)$$

- (e) Crie o vetor $\begin{pmatrix} x - p1 \\ y - p2 \end{pmatrix}$. Para isso, digite no campo de entrada: $V = \{\{x - p1\}, \{y - p2\}\}$. Desmarque a bolinha relativa a este vetor, para que o gráfico seja omitido.

- (f) Calcule hessiana

$$\mathcal{H}_f(p) = \begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix}$$

Para isso digite:

$$f_{xx}(x, y) = \text{Derivada}(f_x, x)$$

$$f_{xy}(x, y) = \text{Derivada}(f_x, y)$$

$$f_{yx}(x, y) = \text{Derivada}(f_y, x)$$

$$f_{yy}(x, y) = \text{Derivada}(f_y, y)$$

$$Hfp = \{\{f_{xx}(p1, p2), f_{xy}(p1, p2)\}, \{f_{yx}(p1, p2), f_{yy}(p1, p2)\}\}$$

- (g) Calcule a fórmula de Taylor de segunda ordem em torno de p , lembrando que:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(p) + Df(p) \begin{pmatrix} x - p1 \\ y - p2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - p1 & y - p2 \end{pmatrix} \mathcal{H}_f(p) \begin{pmatrix} x - p1 \\ y - p2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observe que $f(p) = g(p)$, $\nabla f(p) = \nabla g(p)$ e $\mathcal{H}_f(p) = \mathcal{H}_g(p)$.

A aproximação de segunda ordem é frequentemente uma quádrlica. Para visualizar no Geogebra, defina no campo de entrada: $Vt=MatrizTransposta(V)$. Nesta notação, não esqueça de usar

o "underline" antes de colocar o "t", pois o computador travou quando esquecemos deste underline. Depois digite inicialmente:

$$M = +\frac{1}{2}(Vt)(Hfp)(V)$$

Isto dará uma matriz com uma linha e uma coluna. $M(1,1)$ apresentará o conteúdo da expressão. Assim:

$$h(x, y) = g(x, y) + M(1, 1)$$

Agora mova o ponto P sobre o gráfico de f . O que você observa?

- (h) Que tal estudarmos o comportamento nos pontos críticos? Para identificá-los, precisamos descobrir que valores (x, y) anulam o gradiente de f . Na janela CAS digite:

Resolver $(\{f_x(x, y) = 0, f_y(x, y) = 0\}, \{x, y\})$.

Após identificar os pontos críticos, digite na janela de álgebra: $(p1, p2, f(p1, p2))$, onde $(p1, p2)$ é ponto crítico. Observe a aproximação pelo plano (primeira ordem) e pela quádrlica (segunda ordem).

- (i) Em seguida estudaremos a classificação dos pontos críticos. Pela fórmula de Taylor, considerando-se a aproximação de segunda ordem suficientemente boa, observações aritméticas nos levam a tirar conclusões diretas quando a matriz hessiana em um ponto p que anula o gradiente é uma matriz diagonal, com todos os elementos da diagonal principal não nulos. Observamos que só sobram a primeira e a terceira parcelas da fórmula de Taylor de segunda ordem.

Se os elementos da diagonal forem ambos positivos, teremos um ponto de mínimo local em p , pois os pontos suficientemente próximos a p terão por imagem a adição de $f(p)$ com um número positivo, o que resultará num valor superior ao de $f(p)$.

Analogamente, se ambos os elementos da diagonal forem negativos, em p ocorrerá uma máximo local, pois os pontos suficientemente próximos terão como imagem um valor inferior ao de $f(p)$.

Quando a hessiana não for uma matriz diagonal, podemos diagonalizá-la, pois ela será sempre uma matriz simétrica para funções bem comportadas. Neste caso existirão autovalores reais λ_1 e λ_2 ,

que serão os elementos da matriz diagonal D , e matrizes ortogonais S e S^t tais que $\mathcal{H}_f(p) = SDS^t$, onde $S^t = S^{-1}$, é a transposta de S , que neste caso coincide com a inversa de S , pelo fato de S ser ortogonal. Para obter S basta colocar em suas colunas autovetores linearmente independentes de $\mathcal{H}_f(p)$, de comprimento 1. Lembramos que devido a simetria de $\mathcal{H}_f(p)$ estes autovetores serão ortogonais. Lembramos ainda que a matriz S é a matriz mudança de base de β para ϵ , onde β é base de autovetores e ϵ é a base canônica, e sua inversa S^{-1} , é a matriz mudança da base ϵ para a base β .

$$\begin{aligned} h(x, y) &= f(p) + Df(p) \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - p_1 & y - p_2 \end{pmatrix} SDS^t \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Chamando

$$u = S^t \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix},$$

vem que:

$$u^t = \begin{pmatrix} x - p_1 & y - p_2 \end{pmatrix} S,$$

de modo que teremos:

$$h(x, y) = f(p_1, p_2) + \frac{1}{2} u^t D u,$$

e com uma análise como a anterior, veremos que a classificação dos pontos críticos se relaciona com o sinal dos autovalores. Felizmente, como o determinante e o traço são invariantes por mudança de base, observamos que se os autovalores tiverem o mesmo sinal o determinante da hessiana será positivo, se tiverem sinais contrários, ele será negativo.

(j) Seja Q um ponto crítico de f . Assim $\nabla f(Q) = 0$.

Quando ambos os autovalores de $\mathcal{H}_f(Q)$ são negativos, temos:

$\det(\mathcal{H}_f(Q)) > 0$ e $\text{tr}(\mathcal{H}_f(Q)) < 0$. Portanto ocorre um máximo relativo em Q .

Quando ambos os autovalores de $\mathcal{H}_f(Q)$ são positivos, temos:

$\det(\mathcal{H}_f(Q)) > 0$ e $\text{tr}(\mathcal{H}_f(Q)) > 0$. Portanto ocorre um mínimo relativo em Q .

Quando os autovalores de $\mathcal{H}_f(Q)$ possuem sinais contrários, temos: $\det(\mathcal{H}_f(Q)) < 0$. Portanto ocorre um ponto de sela em Q .

Calcule o determinante e o traço de $\mathcal{H}_f(Q)$, para cada um dos pontos críticos.

- (k) Varie as funções f trabalhadas. Por exemplo, trabalhe com a função $f(x, y) = 2x^3y - 6xy + y^2$