

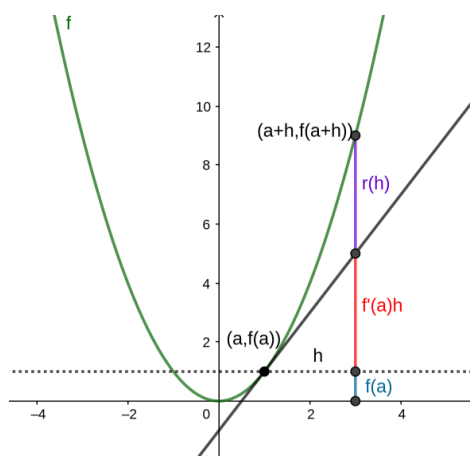
Plano Tangente. Exercícios.

Fátima(Febf-UERJ)

Uma função $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ derivável, pode ser aproximada em um ponto $(a, f(a))$ por uma reta tangente ao gráfico da função neste ponto. Sabemos que:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h), \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Chamando $x = a + h$, vem que $h = x - a$, e quando $h \rightarrow 0$, $x \rightarrow a$ Assim:



$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + r(x - a), \text{ com } \lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x - a)}{x - a} = 0$$

Observe que se "esquecermos" o resto, e considerarmos apenas

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

verificamos que o gráfico de g é a reta tangente ao gráfico de f em $(a, f(a))$

Podemos fazer um procedimento similar para encontrarmos a equação do plano tangente. Começamos revendo a definição de derivada para função $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, de duas variáveis. Vimos que neste caso:

$$f(a+v) = f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + r(v), \quad \text{com } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0 \quad (1)$$

Sejam $a = (a_1, a_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Considere $(x, y) = a + v$, ou seja, $v = (x, y) - (a_1, a_2)$. A expressão (1) pode então ser reescrita como:

$$f(x, y) = f(a_1, a_2) + \langle \nabla f(a_1, a_2), (x - a_1, y - a_2) \rangle + \text{resto}$$

Analogamente, se desprezarmos o resto, teremos:

$$g(x, y) = f(a_1, a_2) + \langle \nabla f(a_1, a_2), (x - a_1, y - a_2) \rangle. \quad (2)$$

A equação acima é a equação do plano tangente ao gráfico de f , no ponto $(a, f(a))$.

Exemplo: Sejam $a = (1, 2)$ e $f(x, y) = x^2 + y^2$. Como $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ temos $\nabla f(1, 2) = (2, 4)$. Verificamos também que $f(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5$. Assim a equação do plano tangente fica:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(a_1, a_2) + \langle \nabla f(a_1, a_2), (x - a_1, y - a_2) \rangle \\ &= f(1, 2) + \langle \nabla f(1, 2), (x - 1, y - 2) \rangle \\ &= 5 + \langle (2, 4), (x - 1, y - 2) \rangle \\ &= 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2) \\ &= 5 + 2x - 2 + 4y - 8 \\ &= 2x + 4y - 5 \end{aligned}$$

Chamando $g(x, y) = z$, podemos dizer que a equação do plano tangente procurado é

$$z = 2x + 4y - 5$$

[Clique aqui para ver o aplicativo](#)