

Trabalho sobre Superfícies especiais

Professora Fátima

1. Determine uma equação cartesiana do plano que passa pelos pontos $A=(12,4,-3)$, $B=(-2,-2,5)$ e $C=(3,-1,3)$. Encontre um vetor normal a este plano. Esboce o gráfico do plano em $\mathbb{R}^3$.
2. Encontre a equação cartesiana do plano gerado pelos vetores $(0,4,-3)$ e $(4,0,-1)$ e que passa no ponto $(5,1,1)$. Determine um vetor normal a este plano.
3. Esboce o gráfico das seguintes superfícies especiais em $\mathbb{R}^3$:
 - (a) Do cilindro $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Identifique a curva diretriz, determinando o plano em que ela se encontra, assim como a reta geratriz.
 - (b) Do cilindro $z = x^2$. Identifique a curva diretriz, determinando o plano em que ela se encontra, assim como a reta geratriz.
4. (Simons-Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 2) Identifique, em cada caso, a superfície quádrlica (elipsoide, hiperboloide de uma folha, hiperboloide de duas folhas, cone elíptico, paraboloides elíptico, paraboloides hiperbólico). Esboce o gráfico. Confira no Geogebra.
 - (a) $2x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$
 - (b) $z^2 = 4(x^2 + y^2)$
 - (c) $z = 4(x^2 + y^2)$
 - (d) $x^2 + z^2 - 4y^2 = 4$
 - (e) $y^2 - 4x^2 - 9z^2 = 36$
 - (f) $z = 4 - 2x^2 - 3y^2$
 - (g) $z = x^2 - 2y^2$

1 Superfícies Quádrlicas

Lembrete: O gráfico no plano de uma equação do tipo:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

é uma cônica (parábola, elipse, circunferência, hipérbole) ou alguma forma degenerada destas curvas, como um ponto, um conjunto vazio ou um par de retas. Exercício: Escolha adequadamente os coeficientes de modo a obter cada uma das seguintes cônicas e a identifique.

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
2. $x^2 + y^2 = 16$
3. $x^2 - y^2 = 1$
4. $y^2 - x = 0$

Quádrlica: O gráfico de uma equação de segundo grau nas variáveis x , y e z da forma:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + J = 0$$

é uma quádrlica.

Quádrlicas centrais:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$$

- Se todos os sinais do membro esquerdo são positivos, trata-se de um elipsóide. Se, além disso, $a=b=c$, temos uma esfera.
- Se apenas um dos sinais no lado esquerdo é negativo, temos um hiperbolóide de uma folha.
- Se exatamente dois sinais forem negativos, temos o hiperbolóide de duas folhas.

Cones elípticos

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a, b, c > 0,$$

com nem todos os sinais do lado esquerdo sendo iguais.

Parabolóides elípticos e hiperbólicos:

Apresentam-se em alguma das três formas abaixo:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = z, \quad \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = x, \quad \pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = y, \quad a, b, c > 0,$$

- Se ambos os sinais do membro esquerdo forem iguais, trata-se de um parabolóide elíptico.
- Se os sinais do membro esquerdo forem diferentes, trata-se de um parabolóide hiperbólico.