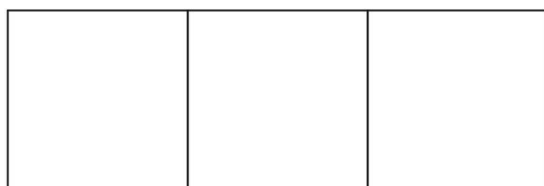


Relação entre Progressão aritmética e Função afim

Exemplo 1: Uma criança brinca de formar quadrados com palitos arrumando os palitos da seguinte forma:



a) Preencha a tabela abaixo, conforme o modelo:

n Número de quadrados	a_n Número de palitos utilizados para formar n quadrados.	(n, a_n) (nº de quadrados, nº de palitos)
1	4	(1,4)
2	$4+3= 7$	(2,7)
3	$4+3+3=4+2(3)$ $=10$	(3,10)
4		
5		
n		

b) Marque os cinco primeiros pontos da última coluna da tabela no plano cartesiano. Trace uma reta que passe por todos eles. Determine a equação desta reta.

c) Sendo $a_1=4$, o número de palitos usados para formar 1 quadrado, $a_2=7$ o número de palitos usados para formar 2 quadrados, e assim por diante, de modo que

$$(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots) = (4, 7, 10, \dots)$$

preencha a tabela abaixo:

$a_2 - a_1 = 7 - 4$ $= 3$
$a_3 - a_2 =$
$a_4 - a_3 =$
$a_5 - a_4 =$
$a_{n+1} - a_n =$

Definição: Uma sequência (b_n) , $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ dada por:
 $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$, onde $b_{n+1} - b_n = r$, em que r é uma constante real, é denominada progressão aritmética, com razão r e primeiro termo b_1 .

No exemplo anterior, o nome da sequência é (a_n) , seu primeiro termo é $a_1=4$ e a razão é $r=3$.

d) Encontre a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética (a_n) com primeiro termo a_1 e razão r .

a_1
$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_1 + r + r = a_1 + 2r$
$a_4 =$
$a_5 =$
$a_n =$

Resultado: A fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética (PA) com primeiro termo a_1 e razão r é $a_n = a_1 + (n - 1)r$

e) Considere a função afim $f(x)=3x+1$. Esboce seu gráfico. Construa a sequência:
 $(f(1), f(2), f(3), f(4), \dots)$

A sequência construída é uma progressão aritmética? Em caso positivo, determine o primeiro termo e a razão.

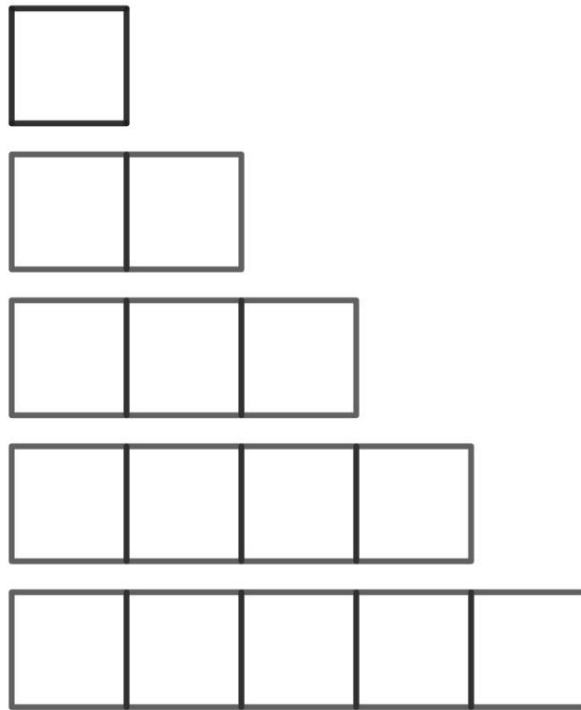
f) Considere a função $f(x)=a \cdot x + b$, com a e b constantes reais. Construa a sequência:
 $(f(0), f(1), f(2), f(3), f(4))$

A sequência construída é uma progressão aritmética? Em caso positivo, determine o primeiro termo e a razão.

g) Para ver mais exemplos da relação entre PA e função afim, acesse o aplicativo:
<https://www.geogebra.org/m/zjk2nqya>

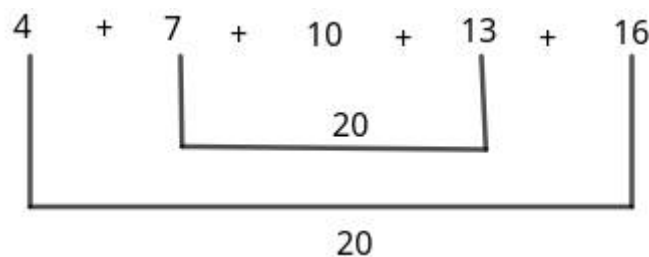
Soma dos termos de uma PA

Exemplo 2: Uma criança gostaria de montar inicialmente um quadrado, em outra linha, dois quadrados seguidos, na linha seguinte três quadrados seguidos, na próxima linha, quatro quadrados seguidos, e por último, 5 quadrados seguidos, sem em nenhum momento desfazer os quadrados já montados, conforme ilustrado na figura abaixo:



Quantos palitos ela precisaria ao todo, para montar todos estes quadrados?

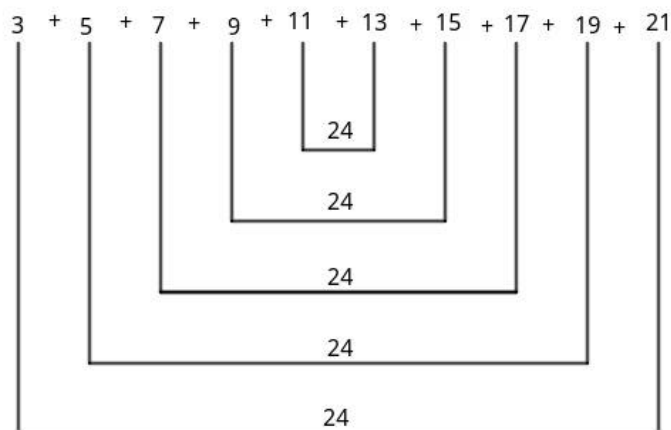
Solução: Podemos retomar a sequência (4, 7, 10, 13, 16) onde o primeiro termo é o número de palitos necessários para fazer um quadrado, o segundo termo é o número de palitos necessários para construir dois quadrados seguidos, o terceiro termo é o número de palitos necessários para montar 3 quadrados seguidos, e assim por diante, sendo que o último termo corresponde ao total de palitos necessários para fazer cinco . Basta então somar todos os cinco termos desta sequência: $4+7+10+13+16$. Para fazer a conta, notamos que “comer pelas beiradas” é uma boa tática.:



A conta dá $10+20+20=50$

Resposta: 50

Exemplo 3: Suponha agora que a criança, resolva montar triângulos com os palitos, colocando um triângulo na primeira linha, dois triângulos emendados na segunda linha, três triângulos seguidos na terceira, e assim por diante, até a décima linha, onde figuram 10 triângulo seguidos, conforme ilustrado na figura. De quantos palitos ao todo a criança precisa para montar todos estes triângulos?



Solução: Observamos que em cada nova fila, adicionamos dois palitos para completar um novo triângulo.
Como são 10 filas, devemos somar os termos da PA: (3,5,7,9,11,13,15,17,19,21)

Observamos que
 $5+19=(3+2)+(21-2)=3+21=24$
 $7+17=(3+4)+(21-4)=3+21=24$
 $9+15=(3+6)+(21-6)=3+21=24$
 E assim por diante.

Como estamos somando 10 termos, formamos 5 pares. Assim a resposta do problema é $5 \times 24 = 100$.

Resultado: Considere uma Progressão Aritmética (a_k) de razão r , com primeiro termo a_1 e último termo a_n . Sejam p e q , dois termos desta PA onde $p = a_1 + kr$ e $q = a_n - kr$, para algum k natural. Assim, a distância entre a posição de p e a posição de a_1 é igual a distância entre a posição de q e a de a_n . Neste caso $p+q = a_1 + kr + a_n - kr = a_1 + a_n$

Resultado. A soma dos n primeiros termos de uma PA (a_k) de razão r , com primeiro termo a_1 e último termo a_n é dada por:

$$S = (a_1 + a_n) \frac{n}{2}$$

Demonstração:

Podemos somar os termos de trás para frente ou de frente para trás, assim:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando membro a membro, obtemos:

$$\begin{aligned} 2S &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \\ &= n(a_1 + a_n) \end{aligned}$$

Logo:

$$S = (a_1 + a_n) \frac{n}{2}$$

Exercícios:

Questão 1 (UNICAMP – vestibular 2024):

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ uma progressão aritmética de razão r e seja $(s_1, s_2, s_3, \dots)$ a sequência definida por $s_n = (a_1 + \dots + a_n)$, isto é, o seu n -ésimo termo é a soma dos n primeiros termos da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sabendo que 168, 220 e 279 são termos consecutivos da sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a razão da progressão aritmética $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é:

- a) 5
- b) 7
- c) 9
- d) 11

Questão 3 (CEDERJ vestibular 2020)

Admita que cada elemento da sequência **(240, x, y, z, 420, t)** represente o número total de pessoas testadas e com resultado positivo para COVID durante uma semana, em cada um de 6 municípios de um determinado Estado. Se essa sequência é uma progressão aritmética, nessa semana de testagem o número total de casos com resultados positivos nos 6 municípios foi igual a:

- a) 2120
- b) 2115
- c) 2110
- d) 2105

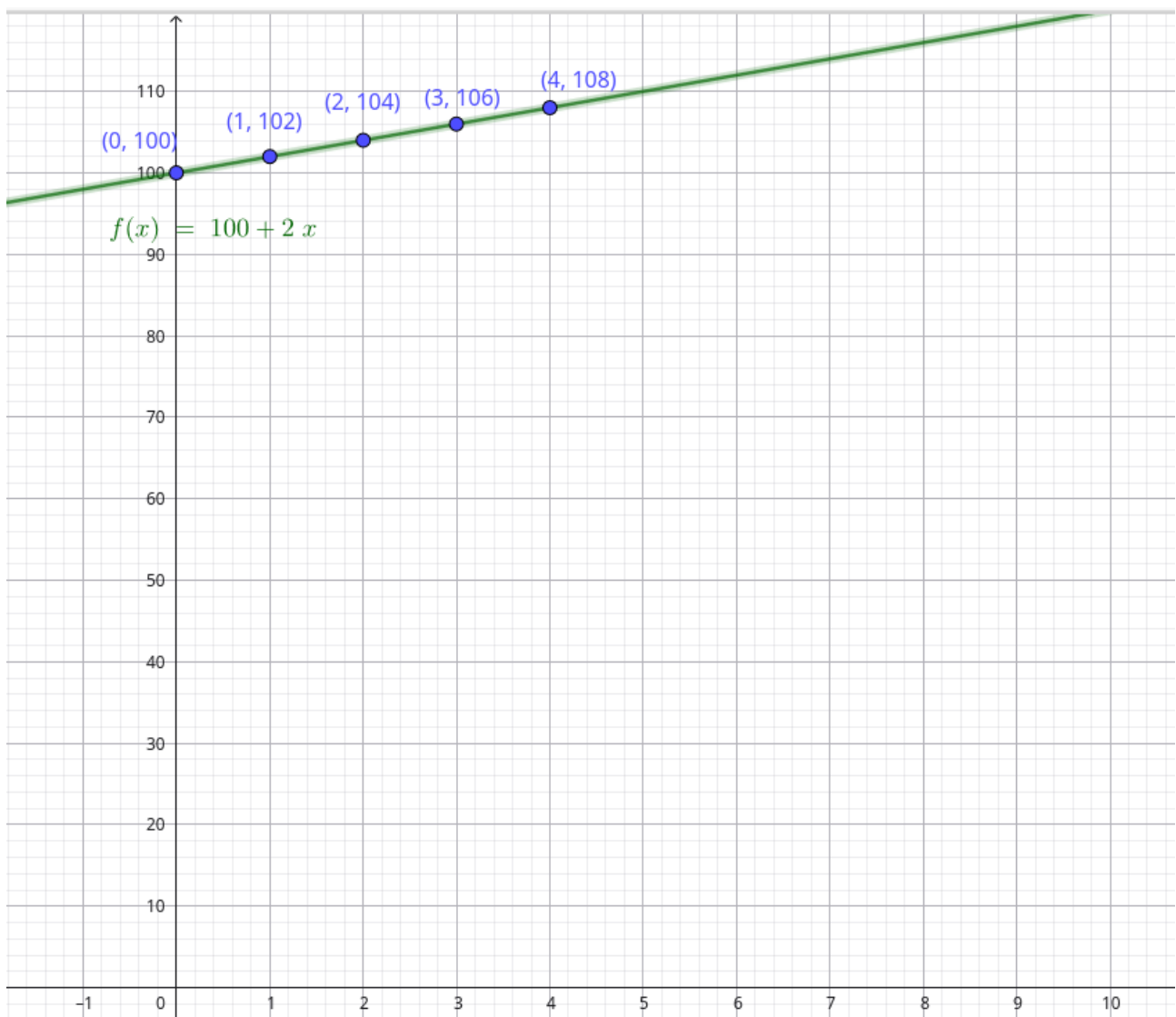
Relação entre juros simples, função afim e PA

Exemplo 1: João pede emprestado 100 reais para uma amiga, comprometendo-se a pagar a dívida 4 meses depois, à uma taxa constante de 2% ao mês a ser aplicada no valor tomado emprestado inicialmente. Que valor João deve pagar para a amiga?

Vemos que a cada mês, a dívida aumenta 2 reais, pois 2% de 100 vale 2. Como passam-se 4 meses, João vai pagar 8 reais a mais, além do dinheiro que ele tinha tomado emprestado. Assim, João deverá pagar um total de $100+8=108$ reais.

Exemplo 2: João pede emprestado 100 reais para uma amiga, comprometendo-se a pagar a dívida x meses depois, à uma taxa constante de 2% ao mês a ser aplicada no valor tomado emprestado inicialmente. Que valor João deve pagar para a amiga?

Poderíamos montar uma função, que chamaremos $M(x)$, que associa o tempo passado em meses ao montante que João deve pagar.



x(tempo em meses)	Montante a ser pago(em reais)	(x,M(x))
0	100	(0,100)
1	100+2	(1,102)
2	100+2+2=100+2(2)	(2,104)
3	100+2+2+2=100+3(2)	(3,106)
4	100+4(2)	(4,108)
x	100+2x	(x, 100+2x)

Repare que a função $M(x)=100+2x$ é uma função afim, se considerada com o domínio nos reais. Note também que $(M(0),M(1),M(2),\dots)$ forma uma PA com primeiro termo $M(0)=100$ e razão 2, sendo que esta razão é o produto da taxa de juros pelo capital tomado emprestado. Note que 100 e 2 são respectivamente os coeficientes linear e angular da reta que é gráfico da função afim mencionada.

A seguir, apresentamos o vocabulário e as notações que frequentemente são usadas no estudo de juros simples.

Juros:

Se uma pessoa quer comprar um eletrodoméstico e não tem o dinheiro suficiente, ela pode fazer um empréstimo e mais tarde pagar o valor que ela tomou emprestado adicionado de um valor a mais, que é chamado de juros. O valor que ela pega emprestado, em geral é chamado de capital (C) , ou valor principal, o valor que é acrescido é denominado juros J, e o valor a ser pago no final é chamado de montante(M), que é o capital adicionado do juros:

$$M=C+J$$

No exemplo 1,, com esta notação temos $C=100$ e $J=8$. Logo: $M=100+8=108$;

Juros simples:

Neste sistema, em períodos iguais, há o mesmo acréscimo em dinheiro a ser pago, e este acréscimo é uma percentagem fixa do capital considerado inicialmente. O número de períodos considerados costuma ser chamado de n, e a taxa de juros, que indica esta percentagem fixa que incidirá sobre o capital, inicial é denotada por i. Assim, os juros pagos por um empréstimo de um capital C, após por exemplo, n meses, tomados há uma taxa de juros i, é dado por:

$$J=C.i.n$$

Mas, ao fazer o pagamento do empréstimo após estes n meses, deve também ser acrescentado o capital que foi tomado emprestado. Assim:

$$M=C+J=C +C i n=C(1+in)$$

No exemplo 1, temos $C=100$, $i=2\%=0,02$, $n=4$
Assim, $J=100(0,02)(4)=8$

Logo $M=100+8=108$. Este valor também pode ser calculado pela conta:

$$\begin{aligned} M &= 100(1+(0,02)4) \\ &= 100(1+0,08) \\ &= 100(1,08) \\ &= 108 \end{aligned}$$

Problemas:

Questão 1 (UEG – vestibular 2019)

Um banco oferece um investimento a juros simples, em que o cliente aplica R\$ 10.000,00 e após seis anos recebe R\$ 15.040,00. A taxa de juros mensal desse investimento é de:

- a) 0,7%
- b) 2,1%
- c) 4,2%
- d) 8,4%
- e) 50,4%

Questão 2 (UNESC):

Marcelo tem uma reserva de R\$ 4.000,00 e vai aplicar a uma taxa de juros simples de 10% ao ano. Após quanto tempo o montante será de R\$ 5.600,00?

- a) 4 anos
- b) 2 anos
- c) 3 anos
- d) 5 anos

Questão 4 (ENEM 2018 PPL):

Um rapaz possui um carro usado e deseja utilizá-lo como parte do pagamento na compra de um carro novo. Ele sabe que, mesmo assim, terá que financiar parte do valor da compra. Depois de escolher o modelo desejado, o rapaz faz uma pesquisa sobre as condições de compra em três lojas diferentes. Em cada uma, é informado sobre o valor que a loja pagaria por seu carro usado, no caso de a compra ser feita na própria loja. Nas três lojas são cobrados juros simples sobre o valor a ser financiado, e a duração do financiamento é de um ano. O rapaz escolherá a loja em que o total, em real, a ser desembolsado será menor. O quadro resume o resultado da pesquisa.

Loja	Valor oferecido pelo carro usado (R\$)	Valor do carro novo (R\$)	Percentual de juros (%)
A	13 500,00	28 500,00	18 ao ano
B	13 000,00	27 000,00	20 ao ano
C	12 000,00	26 500,00	19 ao ano

A quantia a ser desembolsada pelo rapaz, em real, será

- a) 14 000.
- b) 15 000.
- c) 16 800.
- d) 17 255.
- e) 17 700.