

Atividades investigativas em Geometria Espacial

Professora Fátima

1 A ideia intuitiva de volume:

Arquimedes(287-212 a.c) viveu na Grécia antiga, e foi protagonista de um dos mais célebres experimentos envolvendo o conceito de volume. O rei Heron II desconfiou, por conta de boatos, que sua coroa não era integralmente de ouro, embora tivesse o mesmo peso da barra de outro entregue ao ourives para a sua confecção, e contratou Arquimedes para tirar esta dúvida. Ao entrar no banho, para pensar no assunto, Arquimedes percebeu que deixou esparramar um pouco de água da banheira, de onde se inspirou para realizar o experimento, que pode ser sintetizado em dois passos:

- Inicialmente, encheu uma vasilha até a borda e mergulhou nela uma barra de ouro puro do mesmo peso da coroa, e mediu o volume da água derramada.
- Em seguida mergulhou a coroa na mesma vasilha repleta de água. Ela deslocou mais água que a barra de ouro, desmascarando a fraude do ourives. Se a coroa fosse apenas de ouro, ela deveria deslocar a mesma quantidade de água deslocada pela barra de ouro.

Esta pequena lenda ilustra a importância de se conhecer o conceito de volume na solução de problemas práticos.

Atividade 1.1: Faremos uma experiência parecida com a de Arquimedes. Seleccionamos um punhado de moedas e algumas tampas de potes, de modo que pesassem a mesma coisa em uma balança de alimentos. No caso, cada grupo de objetos pesou aproximadamente 24g. No entanto, as tampas ocupam visivelmente um volume maior. Para ilustrarmos o experimento de Arquimedes, mergulhamos as moedas em um copo graduado, e verificamos o volume atingido na medição. Em seguida, repetimos o procedimento, desta vez, com as tampas de potes. Quem deslocará mais água, as moedas ou as tampas?



Atividade 1.2 Nesta atividade trabalharemos o conceito de volume. Cada grupo da turma é convidado a construir uma "obra" com o material dourado e/ou com o multibase, e em seguida calcular seu volume, usando como unidade o cubinho menor.

2 Paralelepípedos

Atividade 2.1 Utilizando o material dourado ou com o multibase, cada grupo é instado a construir 3 paralelepípedos retângulos, e preencher a tabela com os dados obtidos.

Inspirados nos exemplos da tabela 2, formule uma conjectura para o cálculo do volume de um paralelepípedo retângulo, conhecendo-se a área da base e a altura.

Atividade 2.2 Monte, com o material concreto, três caixas, todas com

Sólidos	área da base	altura	Volume
Primeiro			
Segundo			
Terceiro			

Tabela 1: Paralelepípedos retângulos

o mesmo volume, digamos 60 u. v. e calcule a superfície total de cada uma delas.

Caixas	dimensões	área total	Volume: 60 u.v
Primeira			
Segunda			
Terceira			

Tabela 2: Caixas de mesmo volume

Pergunta: Caixas de mesmo volume possuem necessariamente a mesma área total?

Princípio de Cavalieri: Considere dois sólidos de mesma altura em relação a um mesmo plano onde estejam apoiados. Se a interseção de qualquer plano paralelo ao plano da base com cada um dos sólidos possuir a mesma área, então os volumes dos sólidos coincidirão.

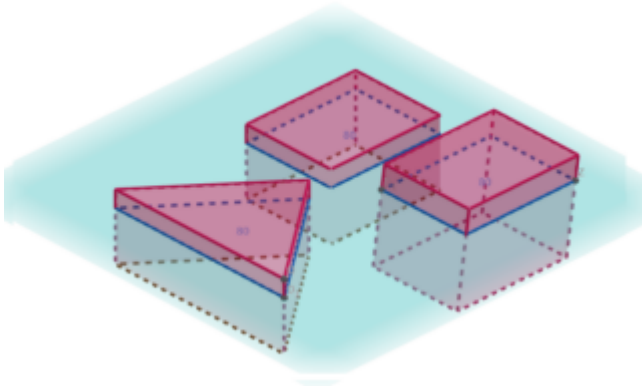


Figura 1: Princípio de Cavalieri

Atividade 2.3 Experimento com cartas: Faça duas pilhas de mesma altura com cartas de um baralho e as coloque sobre a mesa, de modo que cada uma delas possa ser vista como um paralelepípedo retângulo. Em seguida, incline ligeiramente uma das pilhas, formando ainda um paralelepípedo. Qual dos dois sólidos possui maior volume? Justifique.

3 Prismas e Cilindros

Usando o princípio de Cavalieri, podemos intuir como seriam os volumes de prismas e cilindros. Para ilustrar o raciocínio, realizaremos as seguintes atividades:

Atividade 3.1: Considere uma caixa cuja base seja um quadrado de lado 4 u.c. e a altura valha 3 u.c. Qual é o volume desta caixa? Monte, a partir de uma planificação, a caixa "vazada"sem um dos tampos.

Clique aqui para acessar um molde da caixa

Atividade 3.2: É possível montar um triângulo que possua a mesma área de um quadrado de área 4? Em caso positivo, exiba alguns exemplos, identificando a base e a altura do triângulo mencionado.

Atividade 3.3 Monte um prisma cujo triângulo da base seja um triângulo retângulo de catetos 8 u.c. e 4 u.c e que possua altura 3 u. c. Qual é a área de triângulo da base. Monte, a partir de uma planificação, o prisma "vazado"sem um dos tampos.

Clique aqui para acessar um molde do prisma

Em seguida, compare o volume deste prisma com o volume da caixa anterior. Para isto, podemos transferir bolinhas de isopor de um sólido vazado para o outro. O que você percebe? Use o princípio de Cavalieri para generalizar o que observamos neste exemplo.

Atividade 3.4 Monte um cilindro circular reto cujo círculo da base tenha área 16 u.a. e cuja a altura seja 3 u.c. Qual é o raio do círculo da base? Lembrete: a área A de um círculo de raio r é dada por $A = \pi r^2$. Confira se você encontrou $r = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sim 2,26$ u. c. Monte, a partir de uma planificação, o cilindro "vazado"sem um dos tampos.

Clique aqui para acessar um molde do cilindro

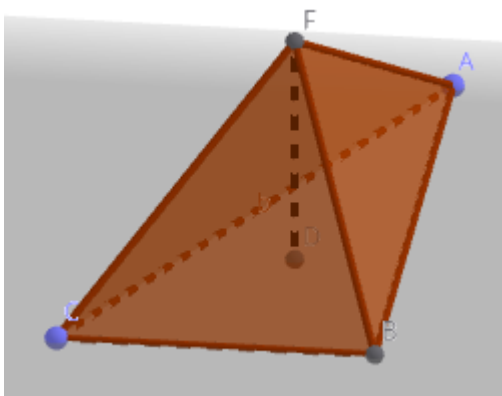
Em seguida, compare o volume deste cilindro com o volume da caixa e do prisma anteriores. Para isto, podemos transferir bolinhas de isopor de um sólido vazado para o outro. O que você percebe? Use o princípio de Cavalieri para generalizar o que observamos neste exemplo.

Clique aqui para acessar o aplicativo que ilustra o princípio de Cavalieri

Atividade 3.5 Calcule a superfície total de cada um dos sólidos: caixa, prisma e cilindro, incluindo os tampos que foram omitidos. Sugerimos que use uma calculadora.

4 Pirâmides e Cones

Iremos agora relacionar o volume de uma pirâmide com o volume de um prisma de mesma área da base e mesma altura que ela. Analogamente, iremos relacionar o volume de um cone, com o volume de um cilindro de mesma área



Atividade 4.1 Monte, a partir de uma planificação, uma pirâmide "vazada" cuja base seja um triângulo retângulo de catetos 8 u.c. e 4 u.c e que possua altura 3 u. c. Em seguida, compare o volume desta pirâmide, com o do prisma de mesma área da base e mesma altura que ela, construído anteriormente. Para isso, use bolinhas de isopor, que devem ser transferidas da pirâmide para o prisma, quantas vezes sejam necessárias para cobrir o volume do prisma. O que você observa?

Clique aqui para acessar um molde da pirâmide

No aplicativo, mova o controle deslizante para ver a planificação

Atividade 4.2 Monte um cone com altura 3 u.c. e cujo círculo tenha área 16 u.a., porém deixe ele "vazado", para que possamos realizar o experimento. Em seguida, compare o volume deste cone com o do cilindro de mesma área da base e mesma altura que ele. Para isso, use novamente bolinhas de isopor, que devem ser transferidas da cone para o cilindro, quantas vezes sejam necessárias para cobrir o volume do cilindro. O que você observa?

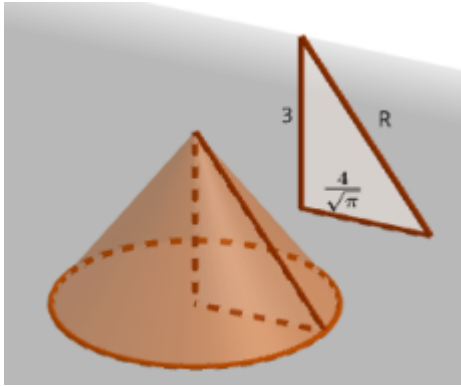


Figura 2: Dica para a construção do molde

[Clique aqui para acessar um molde do cone](#)

Atividade 3.5 Calcule a superfície total da pirâmide e do cone, incluindo os tampos que foram omitidos.

5 Esfera

Para investigarmos o volume de uma esfera de raio R , podemos inscrevê-la em um cilindro de raio R e altura $2R$. Num cilindro idêntico a este, podemos inscrever um cone duplo, cujo centro coincidiria com o centro da esfera inscrita (caso estivessem no mesmo cilindro), e a base de cada ramo é um círculo que coincide com o círculo da base do cilindro.

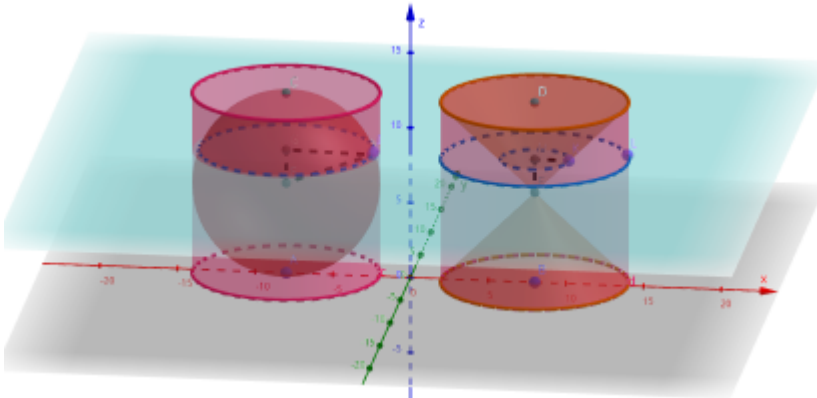


Figura 3: Investigando o volume da esfera

Clique aqui para acessar o aplicativo

Atividade 4.1 Calcule o volume do cilindro e o volume do cone duplo em função de R

Em nosso experimento, verificaremos que o espaço existente entre o cilindro e o cone duplo, é equivalente ao volume de uma esfera. Para montarmos o experimento, compramos uma bolinha oca e a partimos ao meio. Verificamos o raio desta esfera, e o chamamos de R . Em seguida construímos um cilindro com este mesmo raio, e altura também R , porém, sem o tampo de cima. Metade da esfera, poderia ser inscrita nele. Construímos também um cone de raio R e altura R , que da mesma forma pode ser inscrito neste cilindro. Colamos a base do cone na base do cilindro.

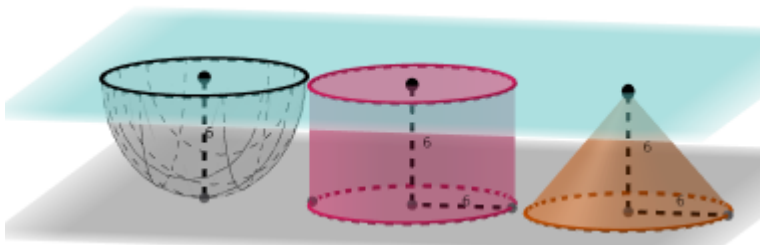


Figura 4: Material de experimento realizado com $R=6$

Atividade 4.2 No experimento, preencha a esfera oca com bolinhas de isopor e despeje no espaço entre o cone e o cilindro, do artefato descrito acima. O que você observa?

Atividade 4.3 Observando que o volume da esfera é aquele ocupado pelo sólido formado entre o cilindro de raio R e altura $2R$ e o cone duplo nele inscrito, conforme mencionado anteriormente, calcule o volume da esfera de raio R , em função de R .

Atividade 4.4 Como poderíamos calcular a área da esfera? Uma maneira é imaginarmos duas esferas concêntricas, uma de raio R e outra de raio $R + h$. Inicialmente calculamos o volume da região situada entre as esferas, e aceitamos que ela seria aproximadamente a área da esfera multiplicada por uma altura h . Notamos que quanto quando h vai se aproximando de zero, nossa aproximação vai se tornando mais aceitável. Fazendo o limite quando h tende a zero, obtemos a área da esfera.

Clique aqui para acessar um vídeo com demonstrativo de alguns dos experimentos