Funções de várias varíaveis e Ensino Básico

Professora: Fátima

1 Introdução

No curso de Cálculo I, lidamos em geral com funções cujo domínio é um subconjunto de $\Re$ e o contradomínio é o conjunto dos números reais. Neste curso, trabalharemos com funções em que o contradomínio pode envolver produtos cartesianos do conjunto $\Re$, como $\Re^2 = \Re \times \Re$ e $\Re^3 = \Re \times \Re \times \Re$, por exemplo, e cujo domínio pode ser um subconjunto de conjuntos deste tipo. Iniciaremos dando exemplos de funções reais, isto é, com contradomínio $\Re$, mas cujo domínio pode ser um subconjunto de $\Re^n$, $n \in \mathbf{N}^*$, em que n não seja necessariamente 1. Será que funções como estas aparecem no ensino básico? Veremos, por meio desta sequência didática, que usar alguns tipos de função neste modelo é útil para modelar problemas envolvendo grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, em particular, trabalharemos com problemas que envolvem a chamada *regra de três composta*.

1. Considere um retângulo de lados x e y cuja área seja 10. Se triplicarmos, por exemplo, apenas o lado x, qual será a área do retângulo formado?E se triplicarmos apenas o lado y? Notamos que deixando a grandeza y fixa, enquanto multiplicamos a grandeza x por uma constante k a área do novo retângulo formado fica multiplicada por k, ou seja $f(kx, y) = kf(x, y)$, significando que a área é proporcional a x. Analogamente, se multiplicamos a grandeza y por c, sem mexer na grandeza x, a área do retângulo assim formado fica multiplicada por c, ou seja, $f(x, cy) = cf(x, y)$, ou seja, a área também é proporcional a y. O curioso é que daí podemos perceber que a área do retângulo é dada pela função:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(1 \times x, y) \\ &= xf(1,y) \\ &= xf(1, 1 \times y) \\ &= xyf(1,1) \\ &= xy, \end{aligned}$$

pois a área de um retângulo de lados 1 e 1 vale 1. De acordo com que foi dito anteriormente, observe, por exemplo, que se temos um retângulo de lados 1 e y, e multiplicamos o lado que mede 1 por x, a área do novo retângulo formado fica multiplicada por x. Isto detalha a passagem da primeira para a segunda linha do desenvolvimento acima. Como você explicaria a passagem da terceira para a quarta linha?

Observação sobre transformações lineares: A área de um retângulo de lados x e b pode ser modelada pela função $g(x) = f(x, b) = bx$. Se estendermos o domínio de g para o conjunto dos números reais, identificamos g como uma função linear. Da mesma forma, a área de um retângulo de lados a e y pode ser expressa por $h(y) = f(a, y) = ay$, que considerada com domínio em $\Re$ é também uma função linear. A função de duas variáveis $f(x, y) = xy$ é uma transformação linear? Vemos que não, pois:

$$f(k(x, y)) = f(kx, ky) = kxky = k^2xy \neq kf(x, y),$$

Assim, uma função linear em cada uma das coordenadas (fixando-se a outra) não é uma transformação linear quando vista como uma função de duas variáveis.

2. Prove que se uma grandeza $w = f(x, y, z)$ é diretamente proporcional a cada uma das grandezas x, y e z então:

$$f(x, y, z) = kxyz,$$

onde k é uma constante.

3. (Temas e problemas elementares- 2ª edição - Elon Lages Lima et al, pag 13) Trabalhando 8 horas por dia, 3 trabalhadores constroem um muro de 40m de comprimento em 12 dias. Se o número de horas de trabalho diário for reduzido para 6 e o número de trabalhadores aumentado para 5, qual o comprimento de um muro de mesma altura que eles construirão em 15 dias? **Resposta**: 62,5 m

4. Seja $w = f(x)$ uma grandeza inversamente proporcional a grandeza x, assim:

$$f(cx) = \frac{1}{c}f(x)$$

   (a) Prove que se uma grandeza $w = f(x)$ é inversamente proporcional à variável x, então existe uma constante k tal que:

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

(b) Prove que se uma grandeza $w = f(x, y, z)$ é inversamente proporcional a cada uma das variáveis x,y e z, então existe uma constante k tal que:

$$f(x, y, z) = \frac{k}{xyz}$$

5. (Temas e problemas elementares- 2ª edição - Elon Lages Lima et al, pag 15) Viajando de carro a uma velocidade média de 60km por hora consigo ir da cidade A para a cidade B em 2 horas e 40 minutos. Qual deve ser a minha velocidade média para que eu percorra a mesma rota em 2 horas? **Resposta:** $80km/h$

6. Prove que se uma grandeza $w = f(x, y, z, u, v)$ for diretamente proporcional a x,y e z, mas inversamente proporcional a u e v, então existe uma constante k, tal que:

$$f(x, y, z, u, v) = k\frac{xyz}{uv}$$

7. (Temas e problemas elementares- 2ª edição - Elon Lages Lima et al, pag 19) Com 5 teares funcionando 6 horas por dia, uma tecelagem fabrica 1800m de tecido com 1,20m de largura em 4 dias. Se um dos teares não puder funcionar e a largura do tecido for de 0,80m, em quanto tempo a tecelagem fabricará 2000m do mesmo tecido, com as máquinas funcionando 8 horas por dia? **Resposta:** $\frac{25}{9}$, ou seja, 2 dias e $\frac{7}{9}$ de um dia de trabalho. Isto dá aproximadamente 2 dias, 6 horas e 13 minutos.