

# Gabarito do Simulado de Álgebra Linear II

Professora Fátima

1. Considere  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:  $T(x, y) = (x + y, x + y)$

- (a) Encontre o núcleo desta transformação linear, uma base para o núcleo e sua dimensão.

**Resposta:** Para encontrarmos o núcleo, resolvemos  $T(x, y) = (x + y, x + y) = (0, 0)$ , de onde resulta que  $y = -x$ . Assim o núcleo são os pontos desta reta, descritos no conjunto abaixo:

$$N(T) = \{(t, -t) = t(1, -1), t \in \mathbb{R}\}$$

Possível base para o núcleo:  $\beta_N = \{(1, -1)\}$ . Como só há um vetor na base,  $\dim(N(T)) = 1$

- (b) Encontre a imagem desta transformação linear, uma base para a imagem e sua dimensão.

**Resposta:**

$T(x, y) = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) = x(1, 1) + y(1, 1) = (x + y)(1, 1)$ . Logo a imagem é gerada pelo vetor  $(1, 1)$ . Assim:

$$Im(T) = \{t(1, 1), t \in \mathbb{R}\}.$$

Isto corresponde aos pontos da reta  $y = x$ .

Possível base para o conjunto imagem:  $\beta_I = \{(1, 1)\}$ . Como só há um vetor na base,  $\dim(Im(T)) = 1$ .

Observação: Como o domínio da transformação é  $\mathbb{R}^2$ , com dimensão 2, ilustramos neste exercício a validade do teorema do Núcleo-Imagem, pois a dimensão do núcleo(1) somada à dimensão da imagem(1) está dando a dimensão do domínio(2).

- (c) Encontre os autovalores desta transformação linear, ou seja, os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

que é a matriz (na base canônica) associada a esta transformação linear. Encontre os autovetores associados aos autovalores encontrados.

**Resposta:**

Para acharmos os autovalores, devemos resolver  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow (1 - \lambda)^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda(\lambda - 2) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 2 \end{aligned}$$

Assim, os autovalores são  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 2$ .

Para calcularmos os autovetores associados a um autovalor  $\lambda$ , devemos encontrar as soluções não nulas de:  $(A - \lambda I)v = 0$ .

Se  $\lambda = 0$ , devemos resolver  $Av = 0$ , ou seja, o autoespaço associado ao autovalor  $\lambda_1 = 0$  é o núcleo desta transformação linear, já calculado. Os autovetores associados a  $\lambda_1 = 0$  são portanto:  $t(1, -1), t \in \mathfrak{R}, t \neq 0$

Para  $\lambda = 2$ , devemos resolver  $(A - 2I)v = 0$ .

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$$\begin{aligned} (A - 2I)v = 0 &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 - 2 & 1 \\ 1 & 1 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow y = x. \end{aligned}$$

Assim, os autovetores associados a  $\lambda_2 = 2$  são da forma:  $s(1, 1), s \in \mathfrak{R}, s \neq 0$ . O autoespaço associado a este autovalor é portanto a reta  $y = x$ .

- (d) A matriz  $A$  do item anterior é diagonalizável? Caso não seja, justifique. Se for diagonalizável encontre uma matriz  $D$ , diagonal e uma matriz  $P$  invertível tal que:

$$A = PDP^{-1}$$

**Resposta:**  $A$  é diagonalizável. Escolheremos a matriz diagonal com autovalores na diagonal principal:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Observe que a escolha da ordem dos autovalores, neste caso, pode ser feita de dois modos diferentes. Ao montarmos a matriz  $P$ , devemos atentar para a ordem escolhida. Assim, na primeira coluna da matriz  $P$ , inserimos as coordenadas de um autovetor associado ao  $\lambda_1 = 0$ , e na segunda coluna, entra um autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2 = 2$ . Deste modo, escolhemos:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Neste ponto, a questão já está resolvida, pois já encontramos  $D$  e  $P$ . Mas calcularemos também  $P^{-1}$  para conferirmos nossa resposta, ou seja, para verificarmos se  $PDP^{-1} = A$

A inversa da matriz  $P$  é aquela matriz  $P^{-1}$  tal que  $PP^{-1} = I$ , onde  $I$  é a matriz identidade. Existem vários métodos de encontrar a inversa. No caso de uma matriz  $B_{2 \times 2}$  invertível, isto é, uma matriz onde  $\det B \neq 0$ , meu método preferido é observar que:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

Observe que  $BB^{-1} = I$

Usando este resultado, obtemos:

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Para finalizarmos, verificamos que

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \left( \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

- (e) Descreva com suas palavras o efeito desta transformação linear em um vetor do plano. Em particular, o que acontece quando  $u$  é um autovetor de  $A$ ? Dica: No aplicativo abaixo, altere as coordenadas do vetor  $u$  do domínio e verifique o efeito no vetor  $w = Au$  da imagem. Acesso ao aplicativo

**Possível resposta:** O efeito desta transformação linear em um vetor  $u$  do domínio é projetá-lo sobre a reta  $y = x$  e em seguida dobrar seu tamanho, ou vice-versa. Os autovetores associados ao autovalor zero são levados na origem:  $(0,0)$ . Se um autovetor é associado ao autovalor 2, este está "sobre a reta  $y = x$ ", sua imagem pela transformação linear dobra de comprimento e é mantida nesta mesma reta.

2. Encontre uma transformação linear  $T : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$  com autovalores  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = 0$  associados respectivamente aos autovetores  $u = (1, 1, 0)$ ,  $v = (-1, 1, 0)$  e  $w = (0, 0, 1)$ . Determine o núcleo e a imagem desta transformação linear.

**Resposta:** Pelo enunciado, a transformação em questão deve atender às condições:

- $T(1, 1, 0) = 1(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$
- $T(-1, 1, 0) = -1(-1, 1, 0) = (1, -1, 0)$
- $T(0, 0, 1) = 0(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$

Um dos modos de encontrar a transformação é observar que basta conhecermos  $T(1, 0, 0)$ ,  $T(0, 1, 0)$  e  $T(0, 0, 1)$ , pois usando as propriedades de transformação linear, podemos dizer que:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T((x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)) \\ &= T(x, 0, 0) + T(0, y, 0) + T(0, 0, z) \\ &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \end{aligned}$$

Já temos a informação que  $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ , pois zero é autovalor associado ao autovetor  $(0, 0, 1)$ . Para descobrirmos  $T(1, 0, 0)$  e  $T(0, 1, 0)$ , podemos usar as propriedades de Transformação Linear e os dados do problema para escrever :

$$\begin{aligned} T(1, 1, 0) &= T(1, 0, 0) + T(0, 1, 0) = (1, 1, 0) \\ T(-1, 1, 0) &= -T(1, 0, 0) + T(0, 1, 0) = (1, -1, 0) \end{aligned}$$

Com isso, montamos o sistema:

$$\begin{cases} T(1, 0, 0) + T(0, 1, 0) &= (1, 1, 0) \\ -T(1, 0, 0) + T(0, 1, 0) &= (1, -1, 0) \end{cases}$$

Somando as linhas do sistema, descobrimos que:

$$2T(0, 1, 0) = (2, 0, 0)$$

Logo:

$$T(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$$

Substituindo esta informação em uma das linhas, por exemplo, na primeira, obtemos:

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) + (1, 0, 0) &= (1, 1, 0) \Rightarrow \\ T(1, 0, 0) &= (1, 1, 0) - (1, 0, 0) \Rightarrow \\ T(1, 0, 0) &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \\ &= x(0, 1, 0) + y(1, 0, 0) + z(0, 0, 0) \\ &= (y, x, 0) \end{aligned}$$

$$\boxed{T(x,y,z)=(y,x,0)}$$

O núcleo desta transformação é o autoespaço associado ao autovalor zero, ou seja,

$$N(T) = \{(0, 0, t), t \in \mathbb{R}\}$$

Ele pode ser obtido também resolvendo-se  $T(x, y, z) = (y, x, 0) = (0, 0, 0)$ . De onde se conclui que  $x = 0$ ,  $y = 0$ , não havendo qualquer restrição a  $z$ , de onde se conclui que  $z$  é qualquer, ou seja,  $z = t$ ,

onde  $t$  é um número real, chegando-se portanto à conclusão obtida anteriormente.

Como  $T(x, y, z) = (y, x, 0) = (y, 0, 0) + (0, x, 0) = y(1, 0, 0) + x(0, 1, 0)$ , concluímos que a imagem é gerada pelos vetores  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 0)$ .

$$\text{Im}(T) = \{s(1, 0, 0) + t(0, 1, 0), \quad s, t \in \mathfrak{R}\},$$

o que corresponde ao plano  $z = 0$

Retrospecto: Vamos conferir se a transformação linear encontrada está de acordo com as hipóteses do enunciado:

De fato:

- $T(x, y, z) = (y, x, 0) \Rightarrow T(1, 1, 0) = (1, 1, 0)$ ,  
logo  $(1, 1, 0)$  é autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1 = 1$
- $T(x, y, z) = (y, x, 0) \Rightarrow T(-1, 1, 0) = (1, -1, 0)$ ,  
logo  $(1, 1, 0)$  é autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2 = -1$
- $T(x, y, z) = (y, x, 0) \Rightarrow T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$ ,  
logo  $(1, 1, 0)$  é autovetor associado ao autovalor  $\lambda_3 = 0$

**Observação:** Um outro modo de encontrar a transformação é trabalhar com a forma matricial, ou seja, calcular os coeficientes da matriz  $A_{3 \times 3}$  que representa a transformação linear na base canônica. É um método talvez mais intuitivo, mas no geral mais trabalhoso, pois teríamos que resolver 3 sistemas, cada um com três incógnitas. Neste problema os sistemas seriam fáceis de resolver, daí não ser uma má ideia. Temos então:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ d + e = 1 \\ g + h = 0 \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 1 \\ -d + e = -1 \\ -g + h = 0 \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ f = 0 \\ i = 0 \end{cases}$$

Para descobrirmos os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , colhemos as informações "das primeiras linhas". Assim:

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, concluimos que:  $c = 0$ ,  $b = 1$  e  $a = 0$ .

Para descobrirmos os valores de  $d$ ,  $e$  e  $f$ , colhemos as informações "das segundas linhas". Assim:

$$\Rightarrow \begin{cases} d + e = 1 \\ -d + e = -1 \\ f = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, concluimos que:  $f = 0$ ,  $e = 0$  e  $d = 1$ .

Para descobrirmos os valores de  $g$ ,  $h$  e  $i$ , colhemos as informações "das terceiras linhas". Assim:

$$\Rightarrow \begin{cases} g + h = 0 \\ -g + h = 0 \\ i = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, concluimos que:  $i = 0$ ,  $h = 0$  e  $g = 0$ .

Portanto, a matriz que representa a transformação na base canônica é:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notamos que se aplicarmos a matriz num vetor  $(x,y,z)$ ,obtemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Isto mostra que os dois métodos apresentados levam à conclusão de que  $T(x, y, z) = (y, x, 0)$