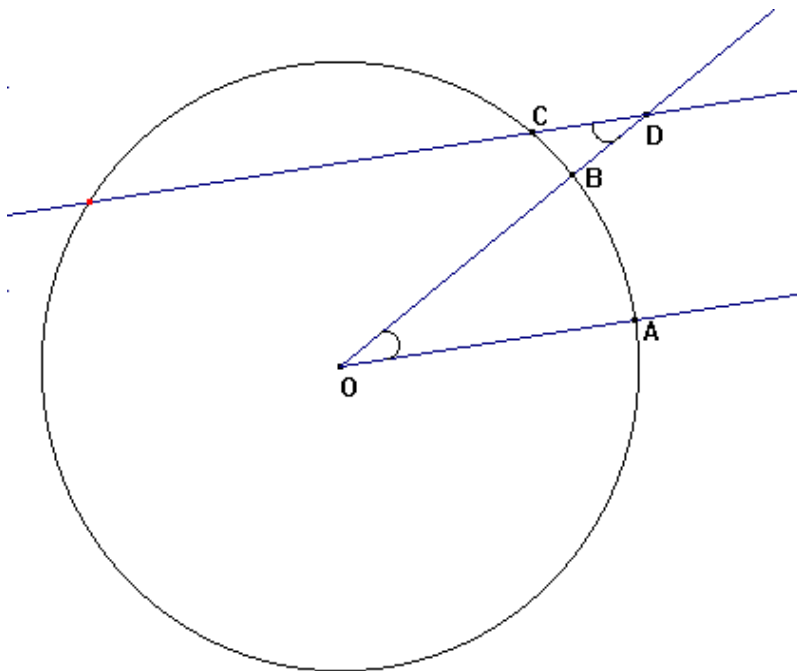


Trigonometria
Professora Fátima

Uma das grandes utilidades da trigonometria é avaliar distâncias inacessíveis. Eratóstenes , cerca de 300 anos antes de Cristo, conseguiu uma estimativa muito boa para a circunferência da Terra, usando muita engenhosidade e conhecimentos básicos de trigonometria.

Atividade 1: Medindo o diâmetro da Terra, usando o método de Eratóstenes.



No dia de solstício de verão (o dia mais longo do ano), na cidade que hoje chama-se Aswan(ponto A), ao meio dia, os raios eram exatamente verticais. Ao mesmo tempo, em Alexandria(ponto B), que fica sob o mesmo meridiano de Aswan, foi colocada uma estaca (BD) perpendicularmente ao solo, conforme a figura.

Tamanho da estaca BD, que é disposta perpendicularmente ao solo.	Tamanho da sombra da estaca formada no chão.	Tangente aproximada do ângulo BDC (usar arredondamento com 2 casas decimais)	Estimativa para o ângulo BDC (em graus)	Distância entre Aswan e Alexandria (tamanho do arco AB)
10 m	1,263m			785Km

Usando estes dados, estime o comprimento da circunferência da Terra.

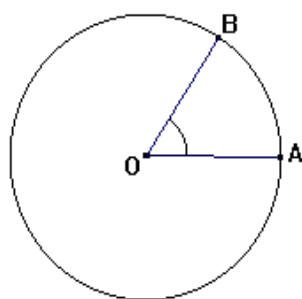
Dado: $\arctg 0,1263$ vale aproximadamente 7,2 graus.

Obs : A circunferência da Terra é avaliada atualmente em 40.000Km. O valor do tamanho da estaca e o da sombra não são históricos, mas o valor aproximado para o ângulo BDC foi de fato obtido por Eratostenes.

Atividade 2: Medida de ângulos em radianos.

Recorte uma circunferência com raio 4 cm. Chame o centro de O. Marque um ponto A sobre a circunferência. Use o barbante para construir sobre a circunferência, um arco que começa em A e tenha comprimento 4 cm(o valor do raio) . Chame seu ponto final de B. O ângulo AOB mede 1 radiano.

Com o transferidor, encontre uma aproximação em graus para AOB.



Descubra o comprimento dessa circunferência em cm. Para isto faça um segmento de reta no papel usando uma régua. Em seguida meça o comprimento da circunferência com o barbante e estenda o barbante sobre o segmento desenhado. Sobre este, determine um segmento A'B', onde A' marca o início do barbante e B' o final. Com a régua, estime o comprimento de A'B'. Compare com a fórmula $C=2\pi r$, que relaciona o comprimento C da circunferência com o seu raio r.



Com o compasso, veja quantas vezes o raio cabe dentro do segmento A'B'. Relacione com o resultado obtido com a fórmula $C=2\pi r$.

Faça o mesmo para uma circunferência de raio 5 cm.

Raio r da circunferência	Um radiano corresponde a aproximament	Comprimento da circunferência	$C=2\pi r$ (Calcule uma	Quantas vezes o raio da circunferência

	e quantos graus?	medindo com o barbante	aproximação com a calculadora)	cabe nela?
4				
5				

Rigorosamente, 360 graus correspondem a exatamente 2π radianos.
Uma circunferência de raio 1 tem comprimento 2π .

Atividade 3: Se α é um ângulo positivo inferior a 90° , definimos

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

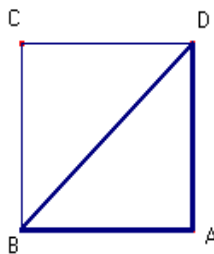
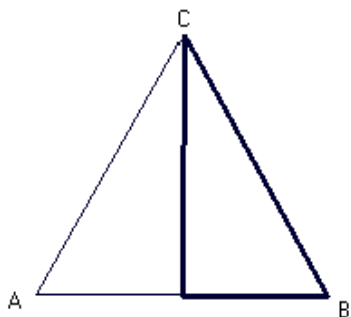
$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha}$$

Preencha a tabela abaixo. Use o transferidor para medir os ângulos, a régua para verificar as medidas e a calculadora para calcular as relações pedidas.

ângulo α (graus)	ângulo α (radianos)	sen α	cos α	tg α	$\frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$	$\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha$
10°						
80°						





Atividade 4: Sabendo-se que o triângulo ABC acima é equilátero e que ABCD é um quadrado, deduza, usando o Teorema de Pitágoras, os valores exatos para seno, cosseno e tangente dos ângulos mencionados na primeira coluna da tabela abaixo.

Ângulo α (graus)	ângulo α (radianos)	sen α	cos α	tg α
30°				
45°				
60°				

Aprendemos a calcular o seno e o cosseno de um ângulo positivo inferior a 90°. É possível definir o valor do seno e do cosseno de qualquer número real.

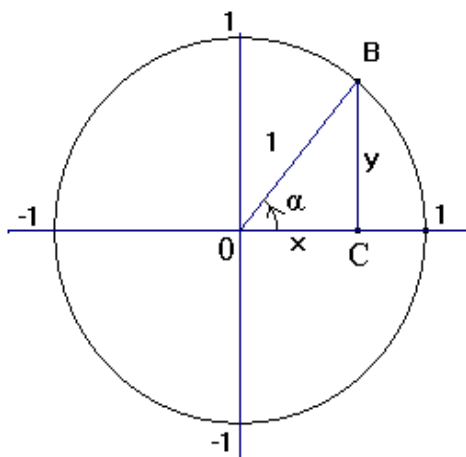
Usando um círculo de raio 1, obtemos uma interpretação geométrica para o cosseno e para o seno definidos anteriormente. Veja a figura abaixo.

$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{1}$ y (Repare que y é a ordenada do ponto B.)

$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{1} = x$ (Repare que x é a abscissa do ponto B.)

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

Pelo teorema de Pitágoras teremos $\text{cos}^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$



Para generalizar o conceito de seno e cosseno de qualquer número real, podemos proceder do seguinte modo. Construimos uma circunferência de raio 1, centrada na origem. Lembre que o comprimento desta circunferência é 2π .

Para saber o valor do seno ou do cosseno de um número *positivo* α , enrolamos no sentido *anti-horário* um barbante de medida α ao longo da circunferência unitária, onde a extremidade inicial situa-se no ponto $A=(1,0)$ e a extremidade final cairá em algum ponto $B=(x,y)$ da circunferência.

Se o número α for *negativo*, devemos partindo do ponto $A=(1,0)$ enrolar o barbante no *sentido horário*, e detectar as coordenadas do ponto $B=(x,y)$ da extremidade final do barbante.

Aí definimos:

$$1) \sin \alpha = y$$

Repare que y é a ordenada do ponto B. O seno de α , nesta construção, é interpretado com α medido em radianos.

$$2) \cos \alpha = x$$

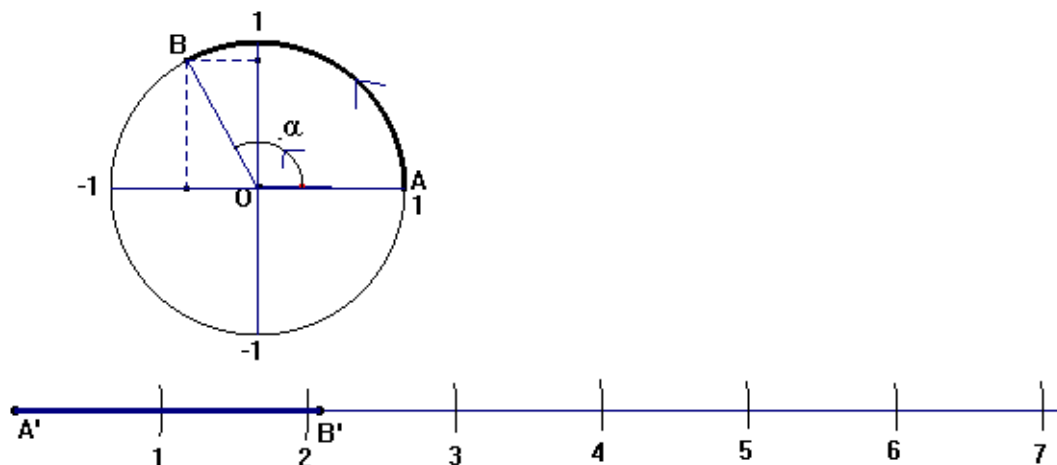
Repare que x é a abscissa do ponto B. O cosseno de α , nesta construção, é interpretado com α medido em radianos.

$$3) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}$$

Observação: Pelo teorema de Pitágoras teremos $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

Na figura abaixo vemos uma ilustração do procedimento tomando-se

$$\alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ radianos.}$$



O comprimento de $A'B'$, que coincide com o comprimento de AB , é , aproximadamente 2,1. Estamos usando o raio como unidade.

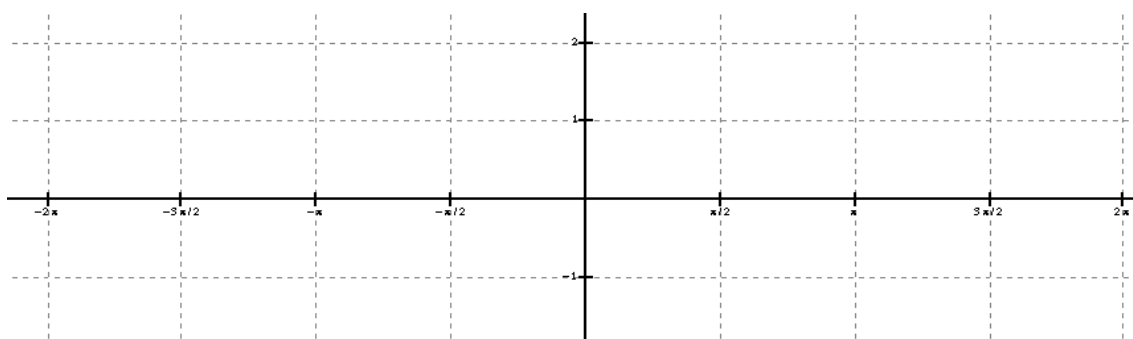
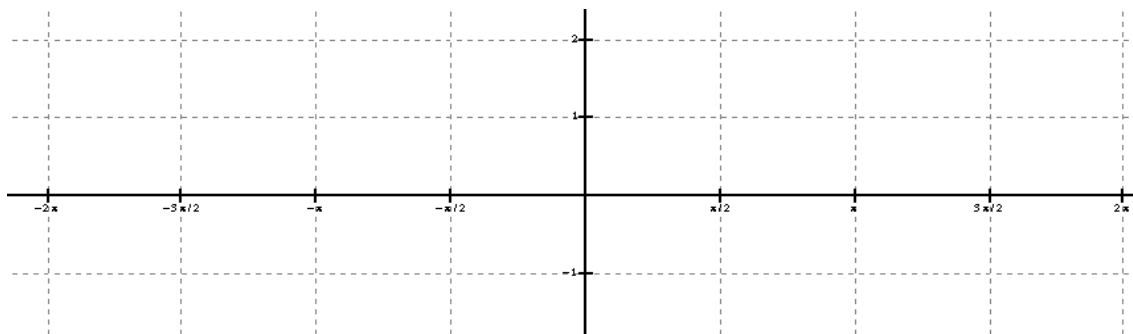
Atividade 5: Usando o princípio exposto acima e os dados da tabela obtida na atividade 4. preencha a tabela abaixo.

0

ângulo α (graus)	Ângulo α (radianos)	sen α	cos α	tg α
90°				
120°				
135°				
150°				
180°				
210°				
225°				
240°				
270°				
300°				
315°				
330°				
360°				

Atividade 6:

Faça o gráfico das funções $f(x)=\sin x$ e $g(x)=\cos x$. No eixo x marque o ângulo em radianos. Use inicialmente o domínio $[-2\pi, 2\pi]$. Use as tabelas feitas nas atividades 3 e 5.



Atividade 7: A função seno e a função cosseno são ambas periódicas e de período 2π radianos, isto é, $\sin(x+2\pi)=\sin x$ e $\cos(x+2\pi)=\cos x$.

Use as fórmulas:

$$\sin(a+b)=\sin a \cos b+\sin b \cos a; \quad \cos(a+b)=\cos a \cos b-\sin a \sin b$$

para provar que 2π é período e aproveite para mostrar que é o menor período positivo.

Atividade 8: Sejam $z=\cos(a)+i\sin(a)$ e $w=\cos(b)+i\sin(b)$. Por um lado calcule $z.w$ algebricamente, por outro lado, use a interpretação geométrica para concluir que $z.w=\cos(a+b)+i\sin(a+b)$. Compare os resultados e conclua que $\sin(a+b)=\sin a \cos b+\sin b \cos a$ e $\cos(a+b)=\cos a \cos b - \sin a \sin b$.

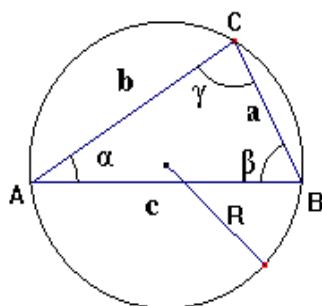
Atividade 9: Usando que $\sin(a+b)=\sin a \cos b+\sin b \cos a$ e $\cos(a+b)=\cos a \cos b - \sin a \sin b$, prove que:

a) $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

b) $\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)$

Atividade 11: Lei dos senos: Num triângulo ABC vale a relação:

$a/\sin(a) = b/\sin(b) = c/\sin(c) = 2R$, onde R é o raio do círculo no qual o triângulo está inscrito.



a) Verificar a lei dos senos no triângulo acima. Obtenha os dados usando a régua, calculadora, etc.

ângulo	Medida do seno do ângulo	Medida do lado oposto ao ângulo	$\frac{\text{lado oposto ao ângulo}}{\sin(\text{ângulo})}$	2R
α				
β				
γ				

b) Prove a lei dos senos

Atividade 12: Medida do Pão de Açúcar

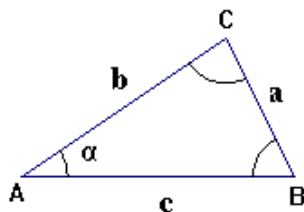
Um observador está em um ponto A do aterro do Flamengo e vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 10° com o plano horizontal (é possível fazer essa medida com um instrumento chamado teodolito). Ele anda em direção ao seu objetivo até um ponto B distante 650m de A e agora vê o Pão de Açúcar segundo um ângulo de 14° . Qual é a altura do Pão de Açúcar em relação ao plano de observação?

Dados: $\tan(10^\circ)$ é aproximadamente 0,176 e $\tan(14^\circ)$ é aproximadamente 0,249.

Atividade 13: Lei dos cossenos (um tipo de generalização do teorema de Pitágoras)

Seja ABC um triângulo qualquer de lados a, b, c. Então:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

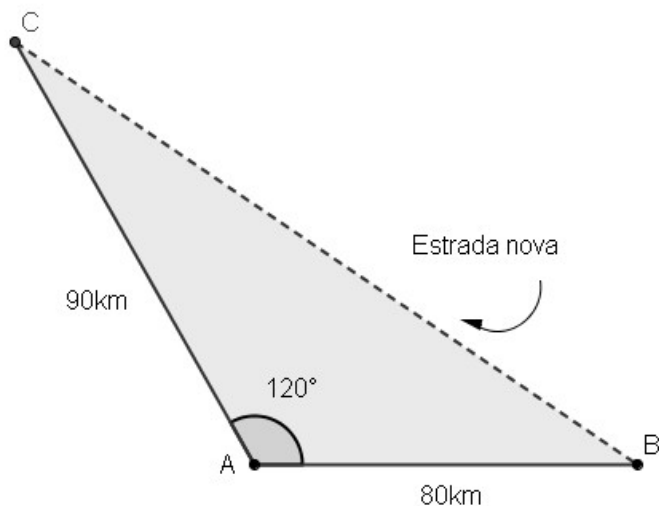


a) Verifique a lei dos cossenos neste exemplo.

b) Prove a lei dos cossenos.

Atividade 14: Resolva os seguintes problemas:

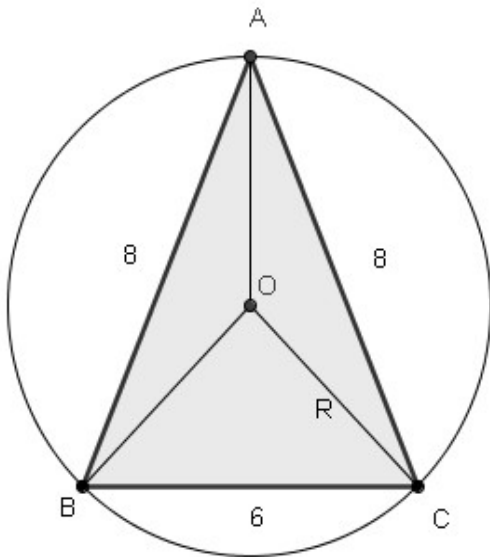
1) Para se deslocar da cidade B para a cidade C é necessário passar pela cidade A. No entanto, está sendo planejada a construção de uma estrada ligando as cidades B e C em linha reta. Usando os dados indicados na figura, calcule aproximadamente o tamanho da estrada nova, que ligará B até C.



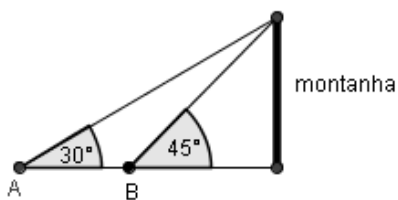
2) Use a lei dos senos para provar que a área de um triângulo de lados a, b e c inscrito em

um círculo R é $S = \frac{abc}{4R}$

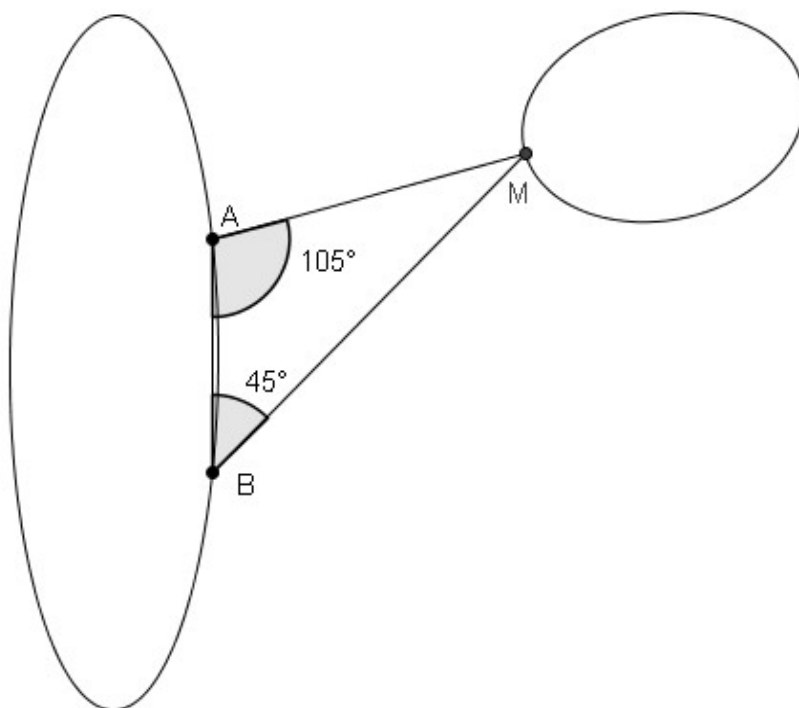
3) Encontre o valor do raio do círculo que circunscreve o triângulo isósceles de lados 6cm, 8cm e 8cm.



4) Bruna avistou uma montanha sob um ângulo de 30° . Andou 200m em linha reta, em direção à ela, ao longo de uma superfície plana, e avistou a mesma montanha sob o ângulo de 45° . Qual é a altura aproximada da montanha?



2) Dois amigos se encontram no litoral de uma ilha, a 5km um do outro, conforme indica a figura. Ambos avistam um monumento numa ilha vizinha. Abel descobriu que o ângulo mede $BAM=105^\circ$ e Bruno descobriu que $ABM=45^\circ$, onde B é o ponto onde Bruno se encontra, A é o ponto onde Abel se encontra e M é o ponto onde está localizado o monumento. Com estes dados, eles estimaram a distância de Abel ao monumento. Calcule você também aproximadamente esta distância.

**Bibliografia:**

- 1) Curso de Física Básica 1- Mecânica - Editora Edgard Blücher LTDA. - Moysés Nussenzveig.
- 2) Temas e Problemas - Coleção do Professor de Matemática , SBM. - Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado.
- 3) Trigonometria e Números Complexos - Impa, SBM- Manfredo Perdigão do Carmo, Augusto César Morgado, Eduardo Wagner.