

Polinômio de Taylor. Série de Taylor. Aplicações

Maria de Fátima de Paiva Almeida

A ideia subjacente aos polinômios de Taylor é aproximar funções por polinômios na vizinhança de um ponto p do domínio da função. Chamando uma função com derivadas de todas as ordens de f e o polinômio de g , o polinômio de Taylor de ordem $n = 4$, deve cumprir as seguintes condições:

- $f(p) = g(p)$
- $f'(p) = g'(p)$
- $f''(p) = g''(p)$
- $f'''(p) = g'''(p)$
- $f''''(p) = g''''(p)$

Para o polinômio de ordem n as derivadas de ordem k de f e de g , devem coincidir no ponto p , onde k é um inteiro maior ou igual a zero e menor ou igual a n .

Exercícios:

1. Considere a função $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6$. Calcule as aproximações por polinômio de Taylor em torno de $p=0$: i) De ordem 1; ii) De ordem 2; iii) De ordem 3. Esboce no GeoGebra, tanto a função f , como as aproximações. Dica: Considere $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Descubra os coeficientes de g , calculando $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$, $f''(0) = g''(0)$ e $f'''(0) = g'''(0)$. Note que em nosso exemplo, f é uma função polinomial de quarto grau. Você notou alguma relação entre os coeficientes de f e os coeficientes dos polinômios encontrados?
2. Considere a função $f(x) = e^x$. Calcule as aproximações por polinômio de Taylor de ordem 4, em torno de $p=0$. Esboce no GeoGebra, tanto a função f , como a aproximação por polinômio de Taylor encontrada. Dica: Considere $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$. Descubra os coeficientes de g , calculando $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$, $f''(0) = g''(0)$, $f'''(0) = g'''(0)$ e $f''''(0) = g''''(0)$.
3. Inspirado no exercício anterior, conjecture uma expressão para a série de Taylor da função exponencial. Resposta:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

4. Usando o exercício anterior, obtenha uma definição para o número de euler e .
5. Desenvolva a expressão $(a + b)^5$.
6. Use o binômio de Newton para desenvolver a expressão $(a + b)^n$.
7. Use o binômio de Newton para desenvolver a expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$.
8. Calcule:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$