

Análise Real

Professora Fátima

1 Séries

Quando dividimos 1 por 3 encontramos a dízima periódica

$$0,333\dots$$

Na verdade este número pode ser lido como a soma infinita

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

Repare que a seqüência

$$\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{100}, \frac{3}{1000} \dots\right)$$

é uma progressão geométrica(PG) de primeiro termo $a_1 = \frac{3}{10}$ e razão $q = \frac{1}{10}$. Sem surpresas, ao aplicarmos a fórmula para a soma dos termos de uma PG infinita onde a razão tem módulo menor que 1, obtemos

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$$

Ocorre que nem sempre as somas infinitas são tão amigáveis. Qual seria o valor da soma infinita

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots?$$

Estamos buscando o valor da soma dos termos da seqüência

$$(1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$$

que por acaso também é uma PG. Se somamos um número par de parcelas temos a sensação que a soma seria 0. Se somamos um número ímpar de parcelas a soma parece ser 1. Pelo menos dois resultados diferentes são nitidamente plausíveis. Surge a necessidade de definir o que seria somar uma quantidade infinita de parcelas. Isto foi feito usando-se o conceito de seqüências. Neste exemplo definimos a seqüência (s_n) dada por

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 - 1, \quad s_3 = 1 - 1 + 1, \quad s_4 = 1 - 1 + 1 - 1, \quad \text{etc}$$

Se existir um número real L que seja limite desta seqüência (s_n) dizemos que a soma vale L , ou, mais elegantemente, que a soma (ou a série) converge para L . Se (s_n) divergir dizemos que a soma (ou a série) diverge.

Neste exemplo (s_n) diverge, já que identificamos duas subsequências convergindo para limites diferentes, a saber, $(s_n)_{n \text{ par}}$ converge para zero enquanto $(s_n)_{n \text{ ímpar}}$ converge para -1.

Já no primeiro exemplo, considerando

$$s_1 = \frac{3}{10}, s_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100}, s_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}, \text{ etc}$$

temos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{3}$$

Dada uma sequência

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$$

Podemos nos perguntar se existe um número real L tal que

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = L.$$

Como $a_1, a_2, a_3, \text{ etc.}$ são parcelas da “soma infinita”, a_k é por vezes chamado do *termo geral da soma (ou da série)*.

Para lidar com somas infinitas, convém recolcar a questão usando a linguagem de limite. Queremos então saber se existe um número real L tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L,$$

onde (s_n) é a sequência das somas parciais

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

A sequência das somas parciais, por abuso também chamada de série, é freqüentemente denotada por

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Para nos referirmos à série (ou mesmo à sequência de parciais que define a série) usamos fartamente as notações

$$\sum a_k, \text{ ou ainda, } \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Cabe observar que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

No entanto, mesmo quando a série não converge (a seqüência s_n diverge), ainda utilizamos $\sum a_k$ para denotar a série. Esta notação pode ser usada para referir-se ao valor da soma, ou à própria seqüência $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Exercícios:

1. Seja

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Em cada item, faça conforme o exemplo. Determine os 6 primeiros termos da seqüência (a_k) e os 6 primeiros termos da seqüência das somas parciais (s_n) . Identifique se a_k é monótona (não crescente, não decrescente), limitada, convergente. Idem para a seqüência das somas parciais s_n . Lembre que se $\lim s_n = L$ então

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = L$$

(a) $a_k = (-1)^k$, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Solução:

Os 6 primeiros termos da seqüência são

$$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1, a_5 = -1, a_6 = 1$$

A seqüência (a_k) , denotada ainda por

$$(-1, 1, -1, 1, \dots),$$

não é monótona, é limitada ($|a_k| \leq 1$, para todo k inteiro, não é convergente (pois possui subsequências convergindo para limites diferentes).

Os 6 primeiros termos da série $s_n = \sum (-1)^k$ são

$$s_1 = -1$$

$$s_2 = -1 + 1 = 0$$

$$s_3 = -1 + 1 - 1 = -1$$

$$s_4 = s_3 + 1 = 0$$

$$s_5 = s_4 - 1 = -1$$

$$s_6 = s_5 + 1 = 0$$

A série (s_n) , vista como seqüência, denotada ainda por

$$(-1, 0, -1, 0, -1, 0, \dots),$$

não é monótona, é limitada e não é convergente.

(b) $a_k = 1/2, s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$

(c) $a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$

(d) $a_k = 2^k, s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$

Observação: Existe uma fórmula que encontra a soma S_n dos n primeiros termos de uma seqüência (a_k) de primeiro termo a_1 e razão q , onde $q \neq 1$, a saber,

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Verifique que a fórmula funciona para o exemplo acima. Para verificar o caso geral basta fazer a conta $S_n - qS_n$ de dois modos diferentes:

Primeiro modo: $S_n - qS_n = S_n(1 - q)$

Segundo modo: Observe, usando a fórmula(??) para o termo geral da PG que

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

assim

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$

Ao efetuarmos a diferença $S_n - qS_n$ muitos termos se cancelam e obtemos apenas

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1q^n = a_1(1 - q^n)$$

Comparando os resultados obtidos através das duas maneira distintas no cálculo de $S_n - qS_n$ obtemos

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

portanto

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

(e) $a_k = \frac{1}{2^k}, s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$

- (f) $a_k = (-1)^k \frac{1}{2^k}$, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.
- (g) $\frac{1}{100}$, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.
- (h) $a_k = \frac{1}{100} + \frac{1}{2^k}$, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.
- (i) $a_k = \frac{1}{k}$, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.
- (j) $a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.
- (k) $a_k = \frac{1}{k^2}$, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$.

Decidir sobre a convergência de séries pode ser um problema delicado. Todo um campo de estudo da matemática, designado hoje por análise real, floresceu no século XIX em grande parte impulsionado por este problema.

Resultado 1 *O termo geral de uma série convergente tem limite zero, ou seja,*

$$\sum a_k \text{ é convergente} \Rightarrow \lim a_k = 0$$

Demonstração: Seja (s_n) a seqüência das somas parciais, iassim:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por hipótese a “soma infinita” converge, logo existe um número real S tal que

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

Considere a seqüência $y_n = s_{n+1}$ cujos termos são

$$\begin{aligned} y_1 = s_2 &= a_1 + a_2 \\ y_2 = s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ y_3 = s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ y_n = s_{n+1} &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração resolva as seguintes questões.

1. Sabendo-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$, quanto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$?
2. Calcule $y_n - s_n$
3. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - s_n)$
4. Seja $z_n = a_{n+1}$. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$, quanto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?

Você deve ter concluído que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = S$ e que $y_n - s_n = a_{n+1}$. Agora

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - s_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \Rightarrow \\ S - S &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \Rightarrow \\ 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}\end{aligned}$$

Logo

$$\lim a_n = \lim a_{n+1} = 0$$

#

Observação A recíproca deste teorema é falsa. Um contra-exemplo clássico é a série $\sum 1/k$. Embora a sequência $a_k = 1/k$ convirja para zero, a soma $\sum 1/k$ diverge para infinito.

Observação: Este resultado é útil para demonstrar que determinadas séries são divergentes. De fato, se o termo geral não estiver convergindo para zero, a série não tem chances de convergir.

Exemplo: A série $\sum (-1)^k$ diverge e podemos provar isto observando que $a_k = (-1)^k$ é uma sequência divergente (não converge para número algum, portanto não pode convergir para zero).

Resultado 2 (Critério da comparação) *Seja $0 \leq a_k \leq b_k$, para todo inteiro positivo k . Então:*

- $\sum b_k$ converge $\Rightarrow \sum a_k$ converge.
- $\sum a_k$ diverge $\Rightarrow \sum b_k$ diverge.

Exemplo 1: Queremos investigar se a série $\sum \frac{1}{2^k+5}$ converge. Já vimos que a série geométrica $\sum \frac{1}{2^k}$ converge. Como

$$0 \leq \frac{1}{2^k+5} \leq \frac{1}{2^k}$$

podemos afirmar, usando a primeira afirmativa do teste da comparação que $\sum \frac{1}{2^k+5}$ converge.

Exemplo 2: Será que a série $\sum \frac{1}{3k-1}$ converge? Vimos que a série $\sum \frac{1}{k}$ diverge. Assim

$$\sum \frac{1}{3k} = \frac{1}{3} \sum \frac{1}{k}$$

será divergente. Como

$$0 \leq \frac{1}{3k} \leq \frac{1}{3k-1}$$

usando a segunda afirmação do teste da comparação podemos garantir que $\sum \frac{1}{3k-1}$ diverge, visto que $\sum \frac{1}{3k}$ diverge.

Observação: No resultado anterior podemos substituir a hipótese $0 \leq a_k \leq b_k$ por $0 \leq a_k \leq cb_k$, com $c \in \mathbf{R}$, já que

$$\sum b_k \text{ converge} \Leftrightarrow \sum cb_k \text{ converge}$$

Exercícios:

1. Convergente ou divergente? Justifique.

- (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$
- (b) $\sum \frac{1}{k^3+1}$
- (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$
- (d) $\sum_{k=1}^{\infty} [(1 + (-1)^k)]$
- (e) $\sum_{k=1}^{\infty} \cos k$
- (f) $\sum \frac{1}{k+3}$
- (g) $\sum \frac{1}{2^k-1}$

2. Demonstre o Teste da comparação. Defina

$$x_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ e } y_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

Verifique que tanto x_n quanto y_n são monótonas (Por quê?). Para provar a primeira afirmação verifique que sob as hipóteses especificadas y_n será limitada, use este fato, juntamente com o anterior para provar que x_n converge e conclua a demonstração da primeira parte. Para provar a segunda parte verifique que sob as hipóteses vigentes y_n não pode ser limitada, e daí conclua a demonstração da segunda parte.

Definição 1 (absolutamente convergente, condicionalmente convergente)

Uma série $\sum a_k$ diz-se absolutamente convergente quando $\sum |a_k|$ converge. Se $\sum a_k$ converge, mas $\sum |a_k|$ diverge, dizemos que a série é condicionalmente convergente.

Resultado 3 *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração: Seja $\sum a_k$ uma série tal que $\sum |a_k|$ convirja. Defina as seqüências (b_k) e (c_k) como abaixo:

$$b_k = \begin{cases} a_k, & \text{se } a_k \geq 0 \\ 0, & \text{se } a_k < 0 \end{cases} ; \quad c_k = \begin{cases} -a_k, & \text{se } a_k \leq 0 \\ 0, & \text{se } a_k > 0 \end{cases}$$

Assim $0 \leq b_k \leq |a_k|$ e $0 \leq c_k \leq |a_k|$. Pelo teste da comparação $\sum b_k$ e $\sum c_k$ são convergentes, assim $\sum a_k = \sum b_k - \sum c_k$ converge.

Teorema 1 (Critério da raiz) *Considere a série $\sum a_k$. Então*

$$1. \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \sum a_k \text{ converge.}$$

$$2. \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \Rightarrow \sum a_k \text{ diverge.}$$

Resultado 4 (Teste da razão ou de D'Alembert) *Sejam (a_k) uma seqüência de termos não nulos. Então:*

$$1. \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \Rightarrow \sum a_k \text{ converge.}$$

$$2. \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1 \Rightarrow \sum a_k \text{ diverge.}$$

Demonstração: Como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L < 1$$

existe c satisfazendo $0 \leq c < 1$ tal que para k suficientemente grande

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < c$$

Assim

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < \frac{c^{k+1}}{c^k}$$

e portanto

$$\frac{|a_{k+1}|}{c^{k+1}} < \frac{|a_k|}{c^k}$$

A seqüência $y_k = \frac{|a_k|}{c^k}$ possui apenas termos positivos e pela última desigualdade é decrescente. Daí concluímos que (y_k) é limitada, digamos, por M .

$$\frac{|a_k|}{c^k} < M \Rightarrow |a_k| < M c^k$$

Como $|c| < 1$, a série $\sum c^k$, que é uma série geométrica, converge. Assim $\sum (Mc^k) = M \sum c^k$ também converge. Pelo teste da comparação $\sum |a_k|$ converge, e como toda série absolutamente convergente é convergente, vem que $\sum a_k$ converge.

A demonstração da segunda parte do teorema fica como exercício.

Exercícios:

1. Demonstre o critério da raiz.
2. Verifique se a série $\sum \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$ é convergente.
3. Verdadeiro ou falso? “ Se $\lim a_n = 0$ então $\sum a_n$ converge.”
4. Diga se as seguintes séries são ou não convergentes, justificando.
 - (a) $\sum (-1)^n$
 - (b) $\sum (-1)^n \frac{1}{2^n}$
 - (c) $\sum \frac{a^n}{n!}$, a constante
 - (d) $\sum \frac{n^2}{a^n}$, a constante .
 - (e) $\sum \frac{n!}{n^n}$ Sugestão: Use que $\lim(1 + \frac{1}{n})^n = e$
5. (Na questão abaixo, escolha o item correto, justificando. Além disso dê um contra-exemplo para cada um dos itens incorretos.) (Provão 2001 - Questão 26) Observe as seguintes séries dadas gerais:

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{e} \quad (2) \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} + a_{2k})$$

respeito dessas séries, é correto afirmar que:

- (a) não podem ser ambas convergentes.
- (b) Se (1) converge, então (2) converge.
- (c) Se (2) converge então (1) converge.
- (d) Se $\lim a_k = 0$, então (1) e (2) convergem.
- (e) Se $\lim a_k = 0$, então (1) converge, mas (2) pode não convergir.

Teorema 2 (Leibniz) Se (a_n) é uma seqüência monotônica decrescente que tende para zero então $\sum (-1)^{n+1} a_n$ é uma série convergente.

Sugestão para a demonstração: Trabalhe com as subsequências $(s_1, s_3, s_5, \dots)$ e $(s_2, s_4, s_6, \dots)$. Observe a monotonicidade para concluir que ambas as subsequências são convergentes, digamos para L_1 e L_2 . Tente mostrar que $L_1 = L_2$.

Teorema 3 (Critério da Integral) *Seja f uma função real contínua, decrescente e positiva. Considere a desigualdade*

$$f(2) + f(3) = \dots + f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(1) + f(2) + f(3) \dots + f(k-1)$$

1. Se $s_n = \int_1^n f(x)dx$ converge então $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ é convergente.

2. Se $s_n = \int_1^n f(x)dx$ diverge então $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ é divergente.

Exercícios

- Prove que $\sum \frac{1}{k}$ diverge e que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.
- (Provão 2000 - Parte B) Seja $\sum A_n$ uma série convergente de números reais.
 - É sempre verdade que $\sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}$ converge?
 - Forneça uma demonstração se a sua resposta em a) for afirmativa ou dê um contra-exemplo se negativa.
- (Provão 2001 - Questão 31) Uma partícula se move sobre o eixo dos x , partindo da origem. No primeiro minuto, ela avança 1 unidade para a direita; no segundo minuto ela retrocede 0,5 unidade; no terceiro minuto ela avança 0,25 unidade; e assim sucessivamente alternando avanços com retrocessos, as distâncias percorridas formando uma progressão geométrica. O limite da abscissa da partícula quando o tempo tender para o infinito é:

$$a) \frac{1}{2} \quad b) \frac{2}{3} \quad c) \frac{3}{4} \quad d) \frac{3}{5} \quad e) \frac{7}{10}$$

- O vigésimo termo de uma seqüência, na qual para todo inteiro n a soma dos n primeiros termos vale $\frac{1}{n}$ é:

$$a) \frac{1}{20} \quad b) \frac{1}{342} \quad c) \frac{1}{380} \quad d) -\frac{1}{342} \quad e) -\frac{1}{380}$$

- Decida se as séries abaixo convergem ou não.

$$(a) \sum -\frac{1}{n}$$

(b) $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$

6. Em cada item ou dê um exemplo, explicando que seu exemplo é correto ou justifique porque é impossível dar um exemplo.

- (a) Uma sequência que seja decrescente e ilimitada.
- (b) Uma série divergente, cujo termo geral tenda a zero. Isto é, $\sum a_n$ diverge, mas $\lim a_n = 0$.
- (c) Uma série que convirja, mas não convirja absolutamente. Isto é $\sum a_n$ converge, mas $\sum |a_n|$ não converge.
- (d) Uma série tal que $\sum |a_n|$ seja convergente, mas $\sum a_n$ não convirja.
- (e) Uma sequência ilimitada que possua uma subsequência convergente.
- (f) Uma série tal que é classificada como convergente, se usamos o teste da razão, mas divergente se usamos o teste da raiz.
- (g) Uma série $\sum a_n$ que seja convergente, mas $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ não seja menor que 1.
- (h) Uma série $\sum a_n$ que seja convergente, mas que $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ não seja menor que 1.
- (i) Uma série $\sum a_n$ divergente, mas que $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ não seja maior que 1.
- (j) Uma série $\sum a_n$ que seja divergente, mas que $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ não seja maior que 1.

7. Calcule $\lim a_n$, para (a_n) dada em cada item, dizendo se as seqüências são ou não convergentes.

- (a) $a_n = \sqrt[n]{n}$
- (b) $a_n = (\sqrt{n^2 + 12n - 15} - n)$
- (c) $a_n = n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$
- (d) $a_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
- (e) $a_n = \frac{1}{n} \cos n$
- (f) $a_n = \sum_{k=1}^n e^{-k}$
- (g) $a_n = \int_2^n \frac{1}{x^2 - x} dx$ Dica: para resolver a integral observe que $x^2 - x = x(x - 1)$ e use frações parciais.

8. Decida se cada uma das séries abaixo é convergente ou divergente.

- (a) $\sum \left(\frac{1}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{k} \right) \right)$. Sugestão: Compare $\frac{1}{k} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{k} \right)$ e $\frac{1}{k^2}$
- (b) $\sum \operatorname{sen} k$
- (c) $\sum (-1)^{k+1} \frac{1}{2^k}$
- (d) $\sum \frac{1}{k^{\frac{1}{3}}}$
- (e) $\sum \frac{1}{k!}$