

O GeoGebra no ensino de Geometria Espacial articulado à construção de artefatos.

Autores:

Maria de Fátima Lins Barbosa de Paiva Almeida.
mfatimadepaiva@gmail.com CPF:05162087726

Ana Vitória Matheus de Azevedo
vitoria20matheus08@gmail.com CPF: 207.573.507-71

Julia Cristina Pinheiro dos Santos
juliacristinapds@gmail.com CPF:15405140724

Maria Gabriella Muniz Gonçalves
mariagaabriella.asg@gmail.com CPF: 156.271.687-57

Mirthyla Capini Pinheiro
mirthylap@gmail.com CPF: 191.751.067-52

1) Apresentação das autoras e do site “Matemática Transformadora”, onde o material da oficina se encontra.

2) Possibilidades de usufruir da comunidade do GeoGebra, pois muitos materiais didáticos lá estão. Em nossa oficina buscamos aproveitar esta comunidade, deixando para elaborar materiais que achamos apropriados, mas que não encontramos exatamente como queríamos no site. É útil saber manusear o GeoGebra, pois isto permite criarmos ou adaptarmos atividades e aplicativos.

3)**Volume do paralelepípedo retângulo.** Podemos trabalhar atividades investigativas com material concreto ou com aplicativos no Geogebra, levando o estudante a deduzir a fórmula para o volume do paralelepípedo retângulo: Atividade sugerida no Geogebra:

<https://www.geogebra.org/m/dp6ghmvv>, de Tim Brzezinski.

Volume do paralelepípedo retângulo: área do retângulo da base x altura

4)**Volume de um prisma.**

Nesta atividade trabalharemos intuitivamente o volume do prisma, ilustrando que ele é o mesmo volume de um paralelepípedo retângulo de mesma área da base e mesma altura do prisma em questão. Utilizaremos a janela 3D do GeoGebra para dar uma ideia intuitiva do Princípio de Cavalière, por meio de exemplos encontrados na comunidade GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/xmvjjkmw>, <https://www.geogebra.org/m/kewbayn6>), e uma explicação passo a passo de nossa autoria, com os sólidos escolhidos específicos que trabalharemos:

- Prisma de base triangular com área da base 80cm^2 e altura 6 cm, sendo que o triângulo da base é isósceles com o lado maior medindo 16cm e altura 10cm em relação a este lado.
- Paralelepípedo retângulo com área da base 80cm^2 e altura 6 cm, sendo que o retângulo da base tem lados 8cm e 10cm.
- Paralelepípedo oblíquo com o mesmo retângulo da base do paralelepípedo retângulo, e altura 6cm.

Apresentaremos as planificações abertas de algum dos sólidos trabalhados, para que o professor possa alternativamente montar os sólidos com seus estudantes, elas foram construídas na janela 2D do GeoGebra. Os sólidos construídos serão usados para experimentos onde transportaremos bolinhas de isopor de um a outro, em modelos “abertos”(faltando uma face) previamente construídos. Desta maneira, ilustraremos que os sólidos montados possuem o mesmo volume.

Passo a passo para a ilustração do Princípio de Cavalière, no caso dos prismas:

Passo a passo:

link para o aplicativo no GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/vyxe73vy>

Entre no Geogebra online: Para isso digite: <https://www.geogebra.org/classic>

1º passo: Construir o prisma reto, cujo triângulo da base tem área 80, e a altura do prisma sendo 6. Construiremos inicialmente o triângulo da base, que em nosso exemplo será isósceles, com o lado maior medindo 16 e com altura 10 em relação a este lado. Para isso, na janela 2d marque os pontos $(-2,0)$, $(-12,-8)$, $(-12,8)$, e volte ao ponto inicial. Depois de construir a base dos outros polígonos, na janela 3d, com o ícone “extrusão para prisma” use este triângulo e a altura 6 para montar o prisma.

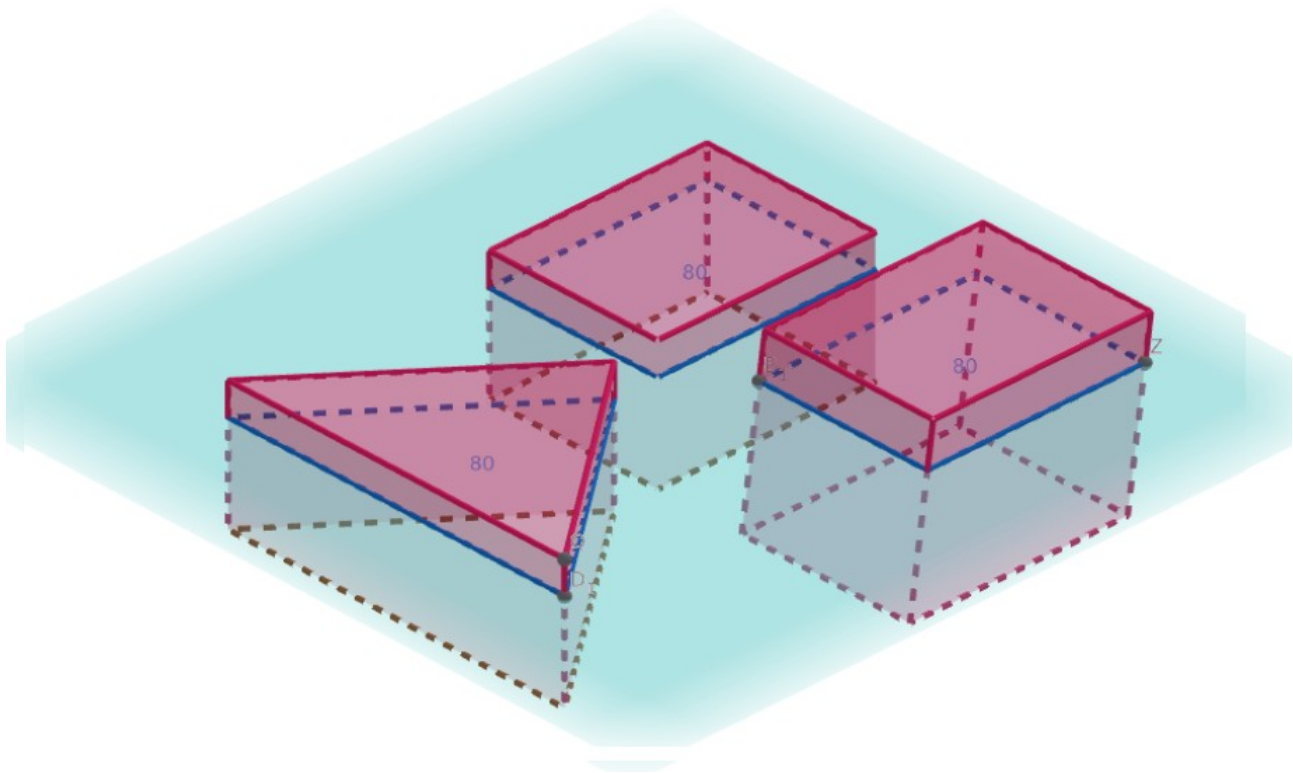
2º Passo: Montar o prisma oblíquo com mesma área da base e mesma altura.

Na janela 2d marque, nesta ordem, os pontos $(0,0)$, $(10,0)$, $(0,8)$ e $(10,8)$ para fazer este retângulo da base, voltando ao primeiro para fechar o retângulo. Na janela 3d, crie o ponto $(3,2,6)$, onde será marcada a altura do paralelepípedo oblíquo. É importante que a última coordenada seja 6, para ele ter a mesma altura do paralelepípedo retângulo traçado anteriormente. Usando o ícone “Prisma”, selecione o retângulo da base e este ponto.

3º passo: Montar o paralelepípedo retângulo, com retângulo da base de lados 8 e 10 e com altura 6. Para isso, monte primeiro na janela 2D o retângulo da base. Use os pontos $(0,-4)$, $(10,-4)$, $(10,-12)$ e $(0,-12)$ para fazer este retângulo. Na janela 3d, com o ícone “extrusão para prisma” use este retângulo e a altura 6.

4º passo: Agora cortaremos os três prismas por um plano paralelo ao plano da base comum aos três. Na janela 2d, crie um controle deslizante k , e o faça variar entre 0 e 6, com passo 0.2. Depois digite na janela de álgebra o comando $z=k$, para criar o plano. Faça a interseção do plano com cada um dos sólidos e configure os rótulos dos polígonos formados para mostrarem o valor. Mova o ponto que você criou ou anime-o.

Vemos que a interseção do plano com cada um dos sólidos produz polígonos com áreas idênticas (neste exemplo, 80). Como a altura dos sólidos é a mesma, pelo princípio de Cavalieri o volume dos três é o mesmo, e este volume pode ser calculado como a área da base multiplicada pela altura.



Agora faremos o experimento com bolinhas de isopor, mostrando que os 3 sólidos possuem o mesmo volume.

Volume do Cilindro circular: É possível obter um círculo com mesma área de um dado do retângulo. Assim, pelo princípio de Cavalieri o volume do cilindro também será a área da base multiplicada pela altura.

Link para o aplicativo: <https://www.geogebra.org/m/xrhjqkxd>

Passo a passo para a construção:

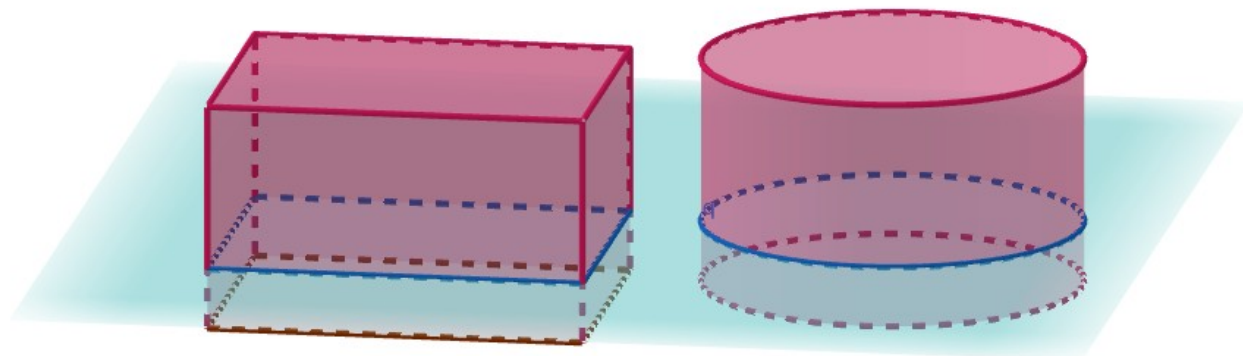
1º passo: Construir o paralelepípedo retângulo com altura 6cm e retângulo da base de lados 10cm e 8cm, conforme feito no item anterior. Na janela 2d, crie um retângulo a partir dos pontos (0,0), (10,0), (10,8) e (0,8). Na janela 3d, com o ícone “extrusão para prisma” use este retângulo e a altura 6.

2º passo. Construir o cilindro de área da base 80cm^2 e altura 6cm. Inicialmente, para a área do círculo ser 80cm^2 , devemos resolver a equação $\pi r^2 = 80$, assim $r = (\sqrt{80/\pi})$. Isto pode ser calculado na janela cas, ou diretamente).

- Na janela 2d, escolha como centro do círculo, por exemplo, o ponto (-7,4). Crie uma circunferência com este centro e raio $r = (\sqrt{80/\pi})$.
- Na janela 3d, usando o ícone “extrusão de prisma, que também serve para cilindro, utilize a altura 6.

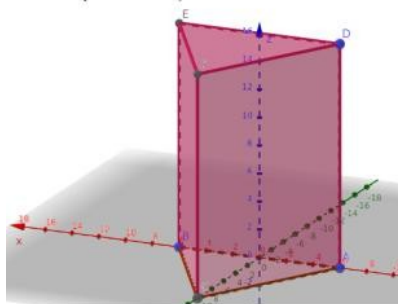
3º passo: Agora cortaremos o cilindro e o paralelepípedo retângulo por um plano paralelo ao plano da base comum aos dois. Na janela 2d, crie um controle deslizante k, e o faça variar entre 0 e 6, com passo 0.2. Depois digite na janela de álgebra o comando $z=k$, para criar o plano. Faça a interseção do plano com cada um dos sólidos e configure os rótulos dos polígonos formados para mostrarem o valor. Mova o ponto que você criou ou anime-o.

Vemos que a interseção do plano com cada um dos sólidos produz figuras com áreas idênticas (neste exemplo, 80). Como a altura dos sólidos é a mesma, pelo princípio de Cavalieri o volume dos sólidos é o mesmo. **Assim o volume pode ser calculado multiplicando-se a área do círculo da base pela altura.**

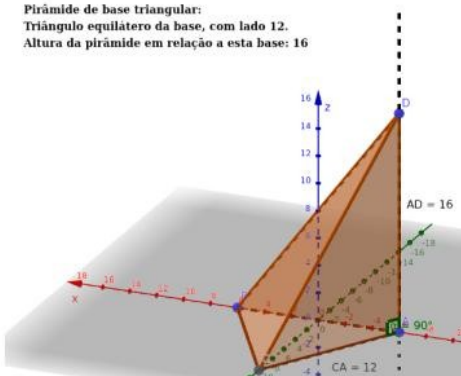


Volume da pirâmide: Por meio de um quebra-cabeça, ilustraremos que o volume de uma pirâmide base triangular é a terça parte do volume de um prisma de mesma base e mesma altura.

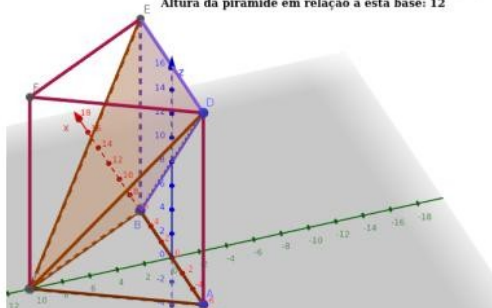
Prisma triangular reto:
Triângulo equilátero da base, com lado 12.
Altura do prisma em relação a esta base: 16



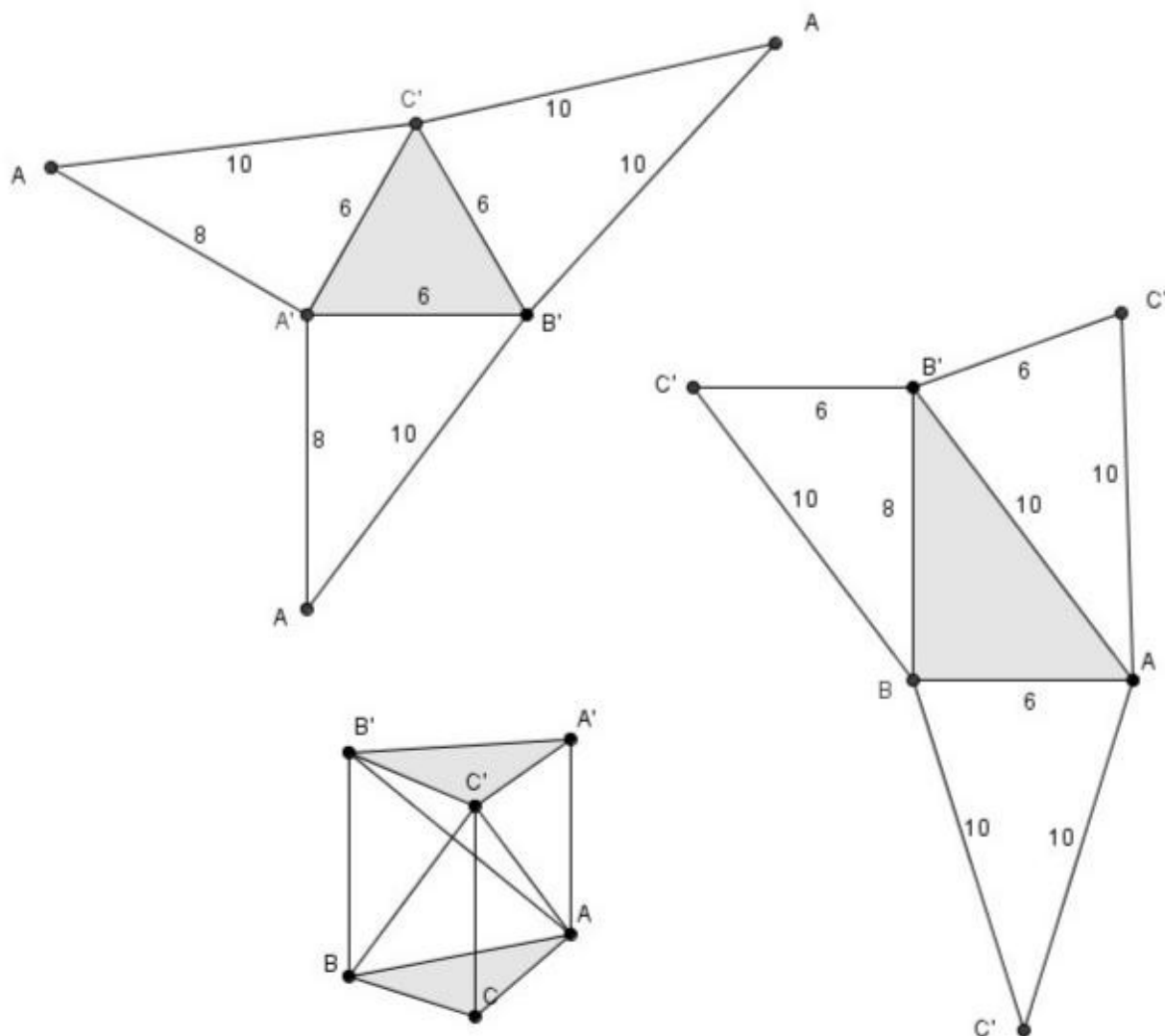
Pirâmide de base triangular:
Triângulo equilátero da base, com lado 12.
Altura da pirâmide em relação a esta base: 16



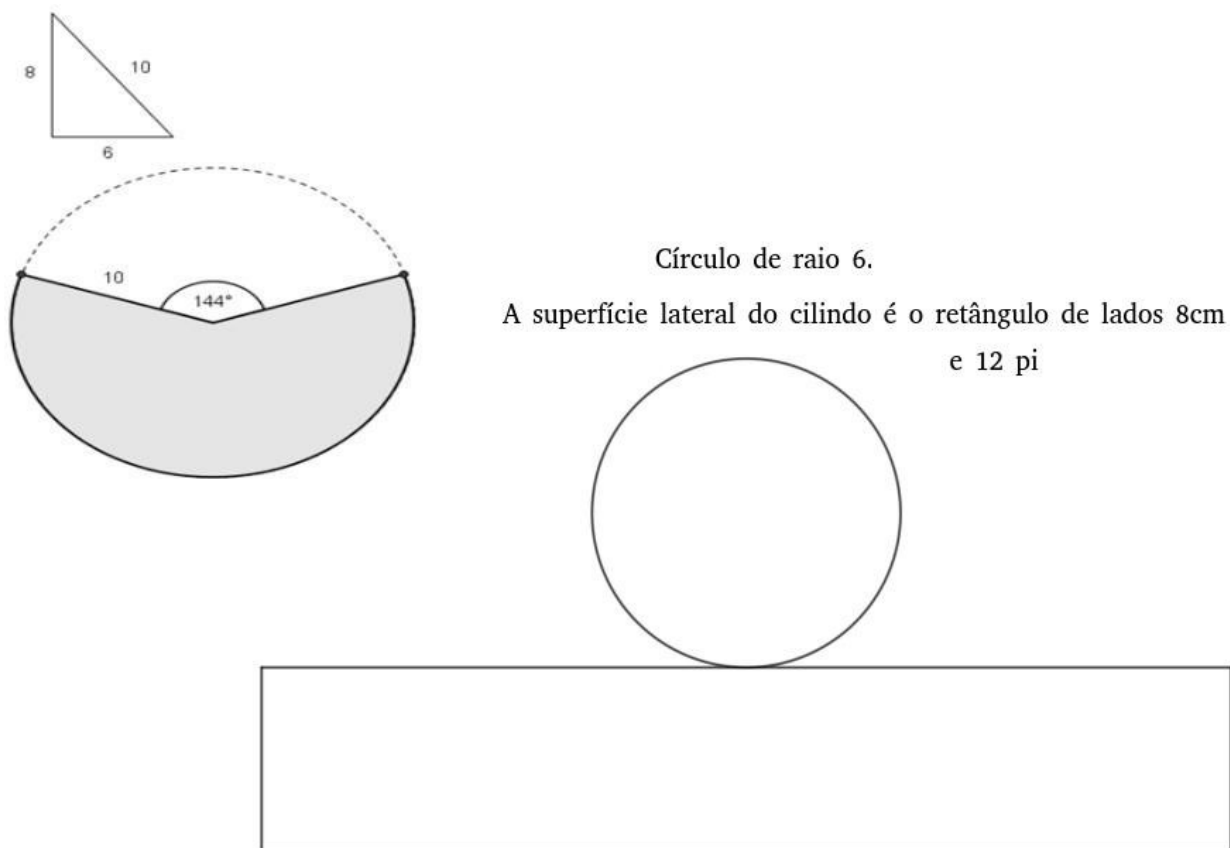
Pirâmide :
Triângulo retângulo EBD da base (lados 12 e 16, 20).
Altura da pirâmide em relação a esta base: 12



Exemplos de planificações que podem ser utilizadas em um experimento similar. Uma observação é que as planificações podem ser obtidas a partir do ícone de planificação de poliedro, na janela 3d.



Volume do cone: Será feito também um experimento com bolinhas de isopor exemplificando que o volume do cone de base circular é a terça parte do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura. Exemplo de medidas que podem ser usadas para a elaboração de um experimento similar.



Volume da esfera:

Ainda usando o GeoGebra 3D, elaboraremos com os participantes uma construção para justificar o volume da esfera, usando-se o princípio de Cavalieri e os resultados para o volume do cone e do cilindro previamente obtidos. Pelo princípio de Cavalieri, o volume da esfera de raio r , é a diferença entre o volume do cilindro que a circunscreve e o volume do cone duplo, onde cada parte é um cone de altura r e raio r , conforme a figura.

Link para o aplicativo no Geogebra: <https://www.geogebra.org/m/jrzdb8pk>

1º passo: Criar os círculos da base dos dois cilindros de raio 6 e altura 12 que aparecem no experimento. Para isso, na janela 2d, crie os pontos $A=(8,0)$ e $B=(-8,0)$ que serão os centros dos círculos. Use o raio $r=6$, para ambos.

2º passo: Usando o ícone “Extrusão de prisma”, que também serve para cilindro, crie os dois cilindros de altura 12.

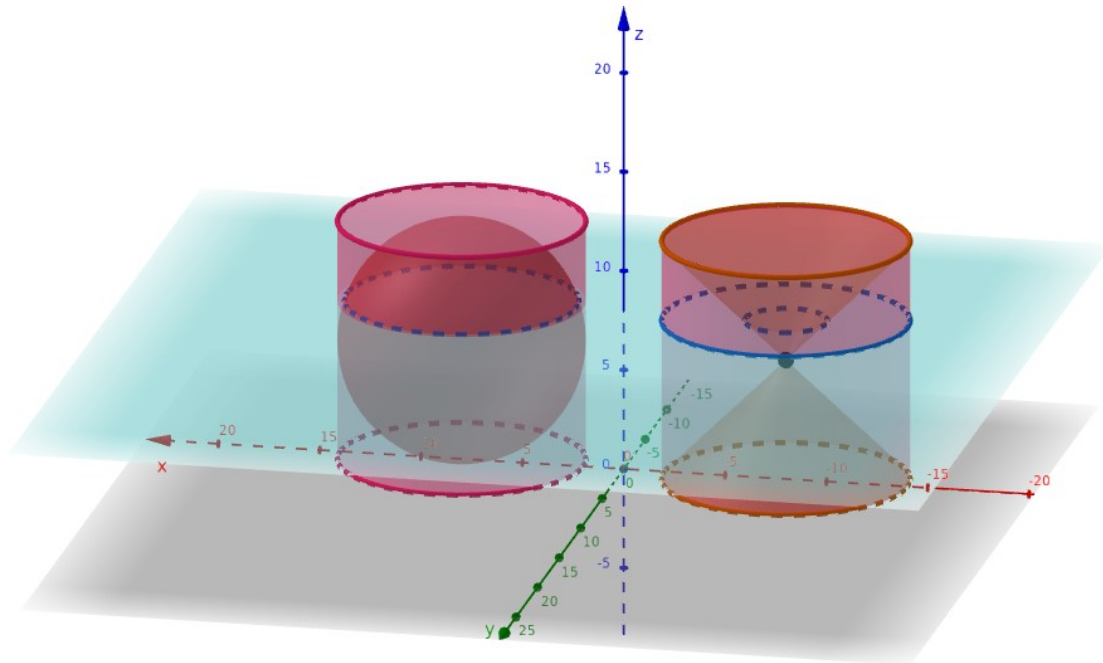
3º passo: Criar uma esfera de raio 6. Para isso:

- Encontre o centro do círculo do topo do cilindro, com ícone “ponto médio ou centro”. Usando o mesmo ícone, encontre o ponto médio deste último ponto traçado com o centro do círculo da base do cilindro. Este será o centro da esfera.
- Trace a esfera com o centro obtido no item anterior e passando no centro do círculo do topo do cilindro.

4º passo: Crie o cone duplo no outro cilindro.

- Encontre o centro do círculo do topo do segundo cilindro, com ícone “ponto médio ou centro”. Usando o mesmo ícone, encontre o ponto médio deste último ponto traçado com o centro do círculo da base do cilindro. Este será o “bico” do cone duplo.
- Com o comando do cone, Crie dois cones retos, um deles com base coincidindo com o círculo do topo do cilindro e o outro com base coincidindo com o círculo da base do cilindro.

5º passo: Agora cortaremos os sólidos por um plano paralelo ao plano da base comum aos dois. Na janela 2d, crie um controle deslizante k , e o faça variar entre 0 e 6, com passo 0.2. Depois digite na janela de álgebra o comando $z=k$, para criar o plano. Faça a interseção do plano com a esfera, gerando um círculo, e a interseção do plano com cada um dos cones e do plano com o cilindro em que eles estão contidos. Mova o ponto que você criou ou anime-o.



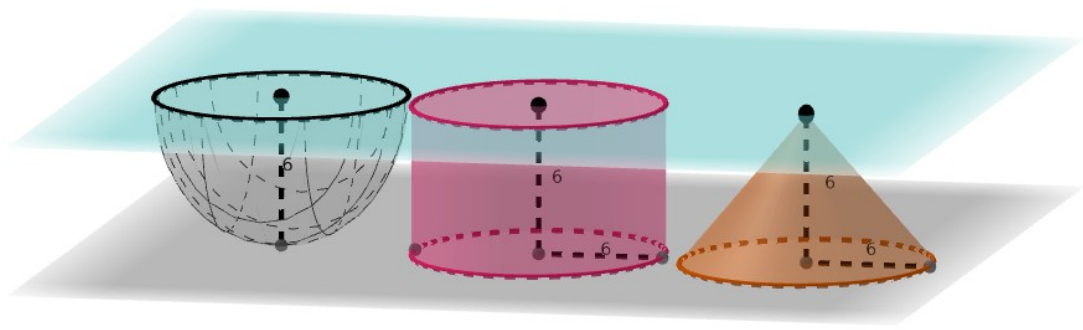
A área da coroa circular coincide com a área do círculo formado na esfera em cada corte. Pelo princípio de Cavalieri concluímos que o volume da esfera somado com o volume do cone duplo, resulta no volume do cilindro, de onde podemos deduzir uma fórmula para o volume da esfera.

Apresentaremos no final um experimento com material concreto relacionando o volume da esfera com o volume do cilindro que a circunscreve. O experimento consiste em transferir bolinhas de isopor de uma semi-esfera de raio r e de um cone circular de raio da base r e altura r para um cilindro de raio r e altura r . Peças para o experimento:

Construir uma semi-esfera de raio 6, só a casca, sem tampa.

Construir um cilindro(casca cilíndrica) sem o tampo de cima, de raio da base 6 e altura 6.

Construir um cone (só a casca), de raio da base 6 e altura 6. O cone é sem o círculo de baixo.



Comentários finais:

Nossa experiência no GT é que a partir deste conjunto de atividades é possível abordar o volume de sólidos geométricos aprimorando-se a intuição geométrica de uma maneira leve e divertida.

Palavras-chave: GeoGebra; Volume de sólidos; Geometria Espacial; Experimentos.

Referências:

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria** Rio de Janeiro. Editora: SBM, 1991.

KALEFF, A.M.M.R. **Vendo e Entendendo Poliedros**. Niterói, RJ. Editora: Eduff, 1998.