

Equações e funções quadráticas
Professora Fátima

Definição 1 (Equação Quadrática) Chamamos de equação quadrática, ou equação polinomial do segundo grau à equação:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

sendo a , b e c constantes reais e x é a incógnita a ser encontrada.

As equações incompletas, ou seja, quando b ou c se anulam, podem ser resolvidas facilmente sem utilização de fórmula. Equações escritas em alguns formatos específicos, também podem ser resolvidas sem dificuldades. As soluções de uma equação são chamadas de raízes desta equação. Tente resolver as equações abaixo, em $\mathbb{R}$:

1) $x^2 - 9 = 0$

2) $x^2 - 3x = 0$

3) $x^2 = 16$

4) $(x + 1)^2 = 16$

5) $x^2 = 5$

6) $(x - 3)^2 = 5$

7) $(x - 10)^2 = 0$

8) $(x - 7)(x + 5) = 0$

9) $2(x - 7)(x + 5) = 0$

Quando a expressão a equação está na forma

$$a(x - r_1)(x - r_2) = 0, \quad a \neq 0$$

como nos dois últimos exemplos, percebemos que quando substituímos x , por r_1 ou x por r_2 o primeiro membro da equação se anula, sendo estas as soluções da equação. Como estas raízes se relacionam com os coeficientes a , b

e c da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$? Tente escrever a soma das raízes em função dos coeficientes, assim como o produto das raízes. Dica:

$$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 + bx + c$$

Para desenvolver o primeiro membro, utilize a propriedade distributiva, que pode ser interpretada geometricamente com a ajuda das figuras (1) e (2).

Fazendo este exercício, você concluirá que:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \quad (r_1)(r_2) = \frac{c}{a}$$

Um ponto interessante é que quando $a = 1$ e as raízes são inteiras, por vezes conseguimos resolver a equação por tentativa. Em geral, buscamos números cujo produto dê o coeficiente c , e depois cuidamos que a soma destes números com o sinal trocado dê o coeficiente b .

$$10) \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$11) \quad x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$12) \quad x^2 - 2x - 35 = 0$$

Há também o recurso de completar quadrados, que, inclusive, é uma das possíveis estratégias para se chegar à fórmula conhecida como fórmula de Bháskara, utilizada na resolução de equações polinomiais do segundo grau. No desenvolvimento que se segue, consideramos $a \neq 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ &\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \\
&\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&\Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \\
&\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}
\end{aligned}$$

Assim, a fórmula conhecida como fórmula de Bháskara é dada por:

Resolva as seguintes equações:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

13) $x^2 - 6x - 5 = 0$

14) $2x^2 - 5x - 7 = 0$

Definição 2 (Função Quadrática) *A função dada por*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

sendo a , b e c constantes reais, e x uma variável real, é chamada de função quadrática. Aqui, consideramos $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$. Podemos descrever alternativamente a mesma função como:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \quad a \neq 0,$$

sendo a , p e q constantes reais.

- 15) Prove que o gráfico de uma função quadrática é simétrico em relação a reta $x = p$. Para isso, prove que $f(p + k) = f(p - k)$, utilizando a expressão: $f(x) = a(x - p)^2 + q$.
- 16) Prove que $V = (p, q)$ é o vértice da parábola que é o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x - p)^2 + q$, $a \neq 0$. Sugestão: Considere separadamente os casos $a > 0$ e $a < 0$.
- 17) Considere uma função quadrática na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Calcule as coordenadas do vértice da parábola que é gráfico de f , em função dos coeficientes a , b e c . Sugestão: Use que $V = (p, q)$, quando f está escrita na forma $f(x) = a(x - p)^2 + q$. Iguale as duas expressões e compare os coeficientes.

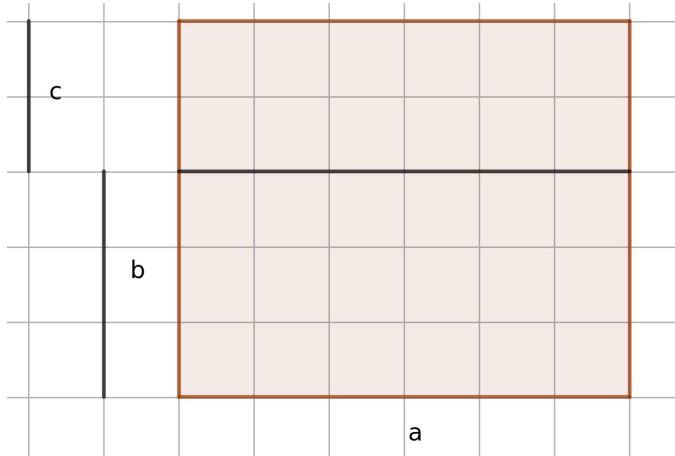


Figura 1: $a(b+c) = ab + ac$

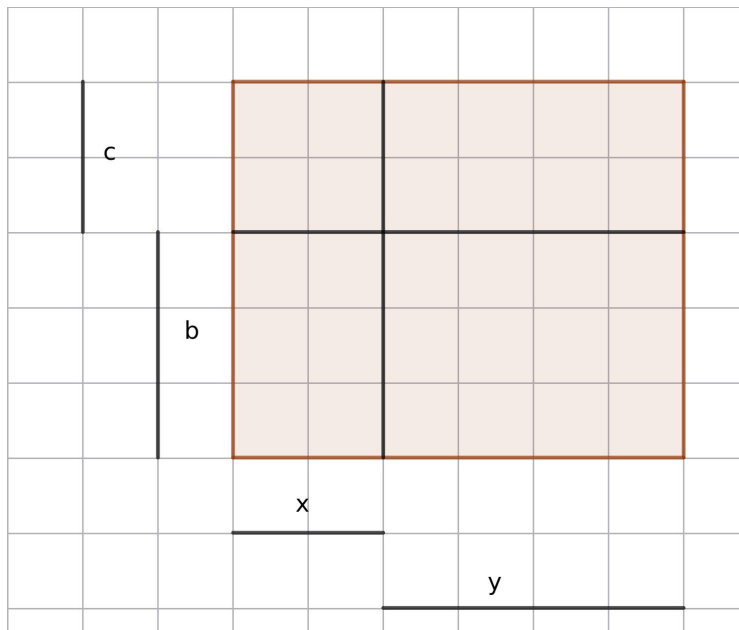


Figura 2: $(x+y)(b+c) = xb + xc + yb + yc$