

Conjuntos

Professora: Fátima

A linguagem de conjunto é útil para situações onde queremos sondar se:

- Um objeto possui uma determinada propriedade.

Neste caso, podemos considerar o conjunto A de todos os objetos que possuem a tal propriedade e para dizermos que um objeto x goza da referida propriedade, dizemos simplesmente que $x \in A$.

Exemplo: $A = \{2n, n \in \mathbf{Z}\}$ caracteriza o conjunto de todos os números pares. Se queremos dizer que o número 4 possui a propriedade de ser par, escrevemos: $4 \in A$, que se lê, 4 pertence ao conjunto A .

- Um objeto atende a uma condição.

Exemplo: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 9\} = \{-3, 3\}$ é o conjunto de todos os números reais que elevados ao quadrado dão 9. Só há dois números que atendem a esta condição. Podemos escrever, por exemplo: $-3 \in A$.

Os objetos que formam um conjunto são denominados elementos deste conjunto. Em geral, os elementos são indicados por letras minúsculas e os conjuntos com letras maiúsculas. Um conjunto que não possui elementos é chamado de conjunto vazio, e denotado por: $\{\}$ ou $\emptyset$.

Uma vantagem de trabalharmos com esta notação é que dispomos da valiosa relação de inclusão: $A \subset B$, que denota que todos os elementos do conjunto A pertencem ao conjunto B , neste caso A é dito um subconjunto de B .

Exemplo: Sejam:

$$A = \{2, 4, 6\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad C = \{1, 3, 5, 7\}.$$

Neste caso: $A \subset B$, ou equivalentemente, $B \supset A$. Porém, por exemplo, $A \not\subset C$ e $C \not\subset B$.

Considerando $A \subset U$, onde U é chamado de conjunto universo, podemos determinar o complementar de A em relação a U , que denotaremos por A^c , ou, ainda, C_U^A . No exemplo anterior podemos dizer que $C_B^A = A^c = \{1, 3, 5\}$, neste caso, o conjunto B foi tomado como o conjunto universo. Poderíamos ainda dizer que $B - A = \{1, 3, 5\}$, pois os elementos listados pertencem a B , mas não pertencem a A . Vale salientar que esta notação é mais geral, pois

não exige que um dos conjuntos esteja contido no outro. Assim, é correto afirmar que $B - C = \{2, 4, 6\}$ e que $C - B = \{7\}$, embora nem $C \not\subset B$, nem $B \not\subset C$.

Há ainda um algebrismo bastante estruturado para lidarmos com os conjuntos, envolvendo as operações de união(símbolo: $\cup$) e interseção(símbolo: $\cap$).

- $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$
- $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ e } x \in B$

Exercícios:

1. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2\}$, $C = \{4, 5, 6, 7\}$. Calcule:
 - (a) $A \cup B$
 - (b) $A \cap B$
 - (c) $A \cup B \cup C$
 - (d) $A \cap B \cap C$
 - (e) $A - B = C_A^B$
 - (f) $B - A$
 - (g) $C - B$
 - (h) $B - C$
 - (i) $C - A$
 - (j) $A - C$
2. Verdadeiro ou falso? Justifique.
 - (a) $A \subset A \cup B$
 - (b) $A \subset A \cap B$
 - (c) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$
 - (d) Seja $A \subset U$. Então $(A^c)^c = A$.
 - (e) Seja $B \subset U$. Se $A \subset B$, então $B^c \subset A^c$.
3. (Q6 -CEFET-2006) O conjunto de todos os valores de x para os quais $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6} \leq 0$ está corretamente indicado no item:

- (a) $] - 3, 2[$
- (b) $[-3, 2[$
- (c) $] - 3, 2]$
- (d) $] - 3, 2] - \{-2\}$
- (e) $[-3, 2]$

4. (Q2-Concurso para professores do Colégio Pedro II -2013) Em relação aos conjuntos numéricos, podemos afirmar que:

- (a) o conjunto dos números irracionais é fechado em relação à operação de adição.
- (b) o conjunto dos números inteiros é fechado em relação à operação de divisão.
- (c) o conjunto dos números racionais não é fechado em relação à operação de multiplicação.
- (d) o conjunto dos números naturais não é fechado em relação à operação de subtração.

5. Interprete as afirmações abaixo, utilizando diagrama de Venn, e verifique quais são verdadeiras e quais são falsas. Aqui A , B e C são subconjuntos de um mesmo conjunto universo.

- (a) Seja $n(X)$ o número de elementos de um conjunto X . Então

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

- (b) Seja $n(X)$ o número de elementos de um conjunto X . Então

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

- (c) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$
- (d) $B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$
- (e) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (Um elemento não estar na união de dois conjuntos, significa que ele não está nem num conjunto, nem no outro.)

- (f) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (Um elemento não estar na interseção de dois conjuntos, significa que ele não está em pelo menos um dos dois conjuntos.)
- (g) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. (Distributividade da interseção em relação à união.) Dica: Quando precisamos provar que dois conjuntos X e Y são iguais, devemos demonstrar que $X \subset Y$ e $Y \subset X$.
- (h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. (Distributividade da união em relação à interseção.)

6. (Prova para tutores do Cederj) Uma pesquisa foi feita com 50 adolescentes. Na entrevista, perguntava-se se o adolescente praticava futebol, basquete, natação ou uma combinação destes 3 esportes. Concluiu-se da pesquisa que:

- 18 não praticam futebol;
- 29 não praticam basquete;
- 23 não praticam natação;
- 24 praticam apenas dois destes esportes;
- 4 praticam todos os três esportes.

É correto afirmar que o número de adolescentes deste grupo que não praticam nenhum dos 3 esportes corresponde a:

- (a) 0
- (b) 1
- (c) 2
- (d) 3
- (e) 4

7. (Q34- Concurso público para magistério estadual -1990) Um aluno resolveu a inequação

$$\frac{2x - 3}{x - 2} \geq 1$$

do seguinte modo:

$$\frac{2x - 3}{x - 2} \geq 1 \Rightarrow 2x - 3 \geq x - 2 \Rightarrow x \geq 1$$

Analisando o desenvolvimento, pode-se afirmar que ele está:

- (a) correto
- (b) errado, pois o correto é $1 \leq x < 2$
- (c) errado, pois foi admitido que $x - 2 \geq 0$
- (d) errado, pois foi admitido unicamente que $x - 2 > 0$
- (e) errado, pois não foi trocado o sinal da igualdade.

8. (Q1-Concurso para magistério -Pedro II) Se A , B e C são conjuntos quaisquer, assinale a opção correta:

- (a) $A \cap B = C \Leftrightarrow A \subset C$ e $B \subset C$;
- (b) $(A - B) \cup (B - A) = C \Leftrightarrow C = (A \cup B) - (A \cap B)$
- (c) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \cap C = B$
- (d) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $C_C^A \cup C_C^B$
- (e) $n(A) = 4$ e $n(B) = 7 \Rightarrow n(A \cup B) = 11$