

Vetor gradiente. Propriedades

Fátima(Febf-UERJ)

1 Funções Diferenciáveis

A noção de função diferenciável que apresentamos agora é a extensão do conceito de derivada de funções reais para o caso de funções $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

Definição 1 (função diferenciável). *Seja $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Seja $a \in U$. Diremos que a função f é diferenciável no ponto a quando existirem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ e além disso, para todo vetor $v = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$, com $a + v \in U$, se tenha*

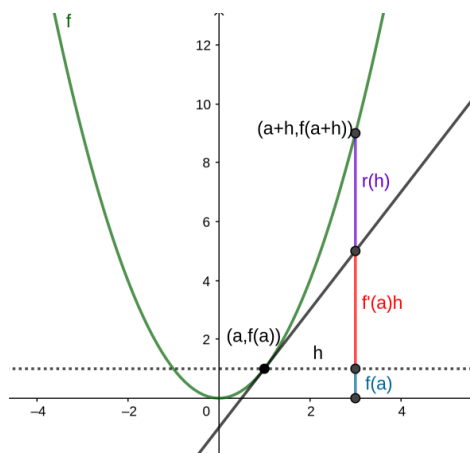
$$f(a + v) = f(a) + \langle \nabla f(a), v \rangle + r(v), \quad \text{com } \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$$

onde $\langle u, v \rangle$ denota o produto escalar entre dois vetores u e v e

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$$

Observação: Repare que para funções $f : U \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ temos:

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + f'(a)h + r(h), \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \\ \Leftrightarrow f(a + h) - f(a) &= f'(a)h + r(h), \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= f'(a) + \frac{r(h)}{h}, \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} f'(a) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h}, \quad \text{com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \\ \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= f'(a) \end{aligned}$$



[Clique aqui para ver o aplicativo](#)

Exercícios:

1. Seja $v = te_1$. Use a definição de derivada para funções $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ para concluir que a derivada direcional de f na direção e_1 é a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.
2. Seja $v = te_2$. Use a definição de derivada para funções $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ para concluir que a derivada direcional de f na direção e_2 é a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.
3. Use a definição de derivada para funções $f : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ para concluir que para u não nulo

$$\langle \nabla f(a), u \rangle = \frac{\partial f}{\partial u}(a)$$

Sugestão: Use $v = tu$

2 Gradiente

Seja $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ diferenciável. Definimos como gradiente de f em um ponto P e denotamos $\nabla f(P)$ ou $\text{grad } f(P)$ ao vetor

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P) \right)$$

[Clique aqui para abrir o aplicativo](#)

1. Nesta questão $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ é diferenciável, u é um vetor não nulo de $\mathbf{R}^2$. Verdadeiro ou falso? Justifique.

(a) $\nabla f(P) \cdot u = \frac{\partial f}{\partial u}(P)$

- (b) Seja $c : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$. Então:

$$[f(c(t))]' = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)$$

- (c) Seja $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Seja $c(t)$ uma curva de nível de f , ou seja, $f(c(t)) = k$, onde k é constante. Então $\nabla f(c(t)) \cdot c'(t) = 0$

2. A altura do vulcão havaiano Mauna Loa é de maneira aproximada descrita pela função

$$h(x, y) = 2.59 - 0.00024y^2 - 0.00065x^2,$$

onde h é a altura acima do nível do mar em milhas e x e y medem as distâncias leste-oeste, e norte-sul em milhas com relação ao topo da montanha. Partindo do ponto $(-2, -4)$, qual direção deve ser tomada para que a altura cresça o mais rapidamente?