# *Evento: Feira matemágica*

## Oficina: Brincando com a matemática (Ensino Médio)

*Versão do professor*

***Atividade 1: O mágico de Ás***
***Material:*** *1 baralho*
***Objetivos:*** Introduzir o tema do princípio da casa de pombos, ou princípio das gavetas de Dirichlet. Introduzir o conceito de permutação, no âmbito da análise combinatória.

Na ausência do mágico, o público escolhe cinco cartas e as entrega ao ajudante de mágico. Este esconde uma carta, coloca as outras quatro sobre a mesa, e chama o mágico, que adivinha a carta escondida.

A título de ilustração, vejamos alguns exemplos de escolhas das cinco cartas feitas pelo público, com a respectiva escolha da carta escondida pelo ajudante de mágico. Lembramos que a mágica é feita com um baralho de 52 cartas, retirando-se os coringas.

| | Escolha do público | carta escondida | Ordem das cartas mostradas ao mágico | Código utilizado |
|---|---|---|---|---|
| I | (4♦,J♥,6♠,7♦,5♠) | (6♠) | (5♠,4♦,7♦,J♥) | (4♦,7♦,J♥)→(P,M,G)→1<br>5+1=6 (naipe:♠)<br>carta adivinhada:(6♠) |
| II | (4♦,J♥,6♠,7♦,5♠) | (7♦) | (4♦,6♠,5♠,J♥) | (6♠,5♠,J♥)→(M,P,G)→3<br>4+3=7 (naipe:♦)<br>carta adivinhada:(7♦) |
| III | (J♣,3♥,2♣,7♦, A♠) | (2♣) | (J♣,3♥,7♦, A♠) | (3♥,7♦, A♠)→(M,P,G)→4<br>11+4=15<br>15-13=2 (naipe:♣)<br>carta adivinhada: (2♣) |
| IV | (7♦,7♥,10♠,2♠,4♣) | (2♠) | (10♠,7♦,4♣,7♥) | (7♦,4♣,7♥)→(G,P,M)→5<br>10+5=15<br>15-13=2(naipe:♠)<br>carta adivinhada: 2♠ |
| **PMG=1, PGM=2, MPG=3, MGP=4, GPM=5, GMP=6** | | | | |

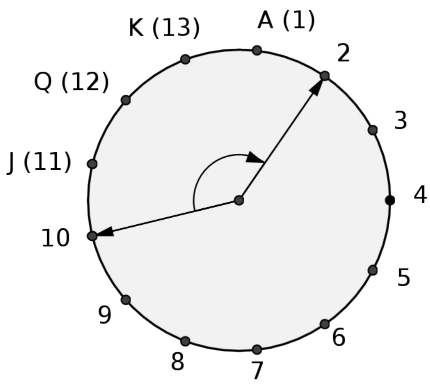
Como o mágico consegue descobrir a carta escondida a partir da sequência de cartas mostradas pelo ajudante?

Atribuímos a cada carta seu respectivo valor numérico, sendo que o Ás (A) vale 1. O valete(J), a dama(Q) e o rei (K) valem respectivamente 11,12 e 13. A primeira carta da sequência mostra o naipe e o indica o número a partir do qual a contagem será feita Como há quatro naipes, em cinco cartas haverá pelo menos duas cartas do mesmo naipe. Para verificar isto, poderíamos imaginar quatro gavetas etiquetadas cada uma com um naipe. Colocaríamos a carta na gaveta de seu respectivo naipe, o princípio das Gavetas de Dirichlet nos garante que em alguma das gavetas haverá pelo menos duas cartas.

A sequência das outras três cartas indicam o valor a ser somado ao da primeira carta, de modo a que o resultado corresponda ao valor da carta escondida. Este valor, indicado pela posição das cartas, é algum número entre 1 e 6. A aritmética é módulo 13, assim, se a soma ultrapassar 13, convém subtraímos sucessivamente 13, até que se obtenha um resultado positivo menor ou igual a

13. Em nosso caso esta subtração será feita no máximo uma vez. Um dos exemplos mais corriqueiros de aritmética modular é o utilizado nas horas. Trata-se de aritmética módulo 12. Por exemplo 15h é o mesmo que 3h da tarde, pois 15-12=3.

O ajudante de mágico deve ter cuidado na escolha da carta a ser escondida, para garantir que ela possa de fato ser alcançada com a soma de até 6 unidades. Vejamos o caso do primeiro exemplo: se o ajudante houvesse escondido o 10, teria que somar 8 ao 2 para alcançar o resultado, o que seria impossível indicar ao mágico. Agora, escondendo-se o 2, somando-se 5 na aritmética módulo 13 ao número 10, ou simplesmente percorrendo 5 unidades, a partir do 10, num relógio como o da figura, chegamos ao 2.



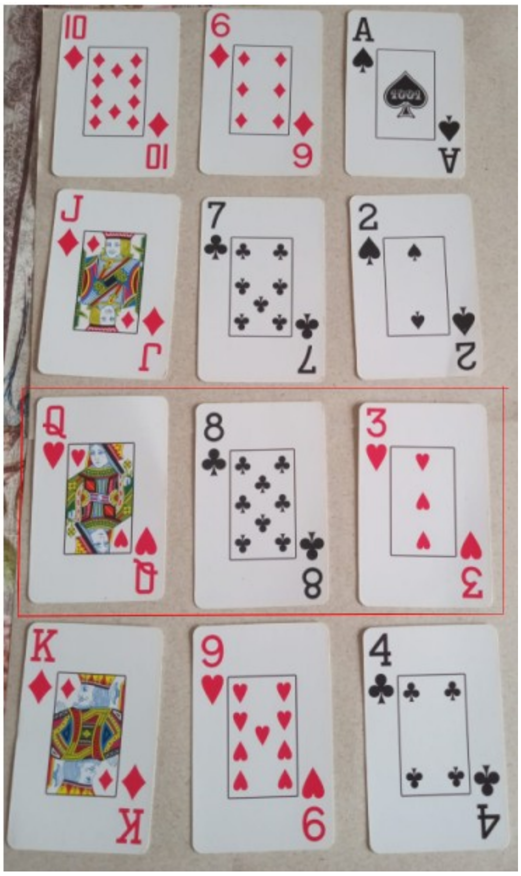

Sabemos que há seis modos de permutarmos 3 objetos. Podemos considerar, entre as três cartas restantes escolhidas pelo público, a carta de menor valor como pequena(P), a de valor intermediário como média(M) a de maior valor como grande (G). Em caso de coincidência do valor numérico, o critério de desempate é feito de acordo com os naipes, por exemplo, com a regra: ♥<♦<♠<♣ . Em seguida convencionamos, conforme especificado na última linha da tabela: PMG=1, PGM=2, MPG=3, MGP=4, GPM=5, GMP=6. Acompanhe os exemplos apresentados na tabela. Esta mágica foi inventada por William Fitch Cheney Jr, em 1920.

### *Atividade 2: Adivinhando a carta escolhida*

**Material:** um baralho
**Objetivos:** Introduzir o conceito de matriz. Trabalhar a transposição de matrizes no contexto de resolução de problemas.

Apresenta-se uma disposição retangular de cartas, por exemplo, com 3 linhas e 4 colunas, com as faces identificadas para cima. Pede-se para um voluntário pensar em uma carta entre as cartas dispostas e anotar em um papel, dizendo ao adivinho apenas a **coluna** onde a carta se encontra. Digamos que neste exemplo, o voluntário tenha escolhido uma carta na terceira coluna.

Em seguida, o mágico deve recolher todas as cartas e as dispor em outra configuração (mas com o cuidado desta nova configuração ser justamente a matriz transposta da anterior). Com a nova configuração, o adivinho pergunta em que **coluna** aquela mesma carta escolhida anteriormente se encontra. Neste exemplo, como na primeira configuração o voluntário disse que a carta se encontra na terceira coluna, o mágico já sabe que a carta está na terceira linha da nova configuração. Com a informação da coluna na nova configuração, o adivinho saberá exatamente qual é a carta. Digamos que a resposta do voluntário seja que a carta na nova configuração se encontra na segunda coluna. Aí o mágico “adivinha” a carta escolhida pelo voluntário é um 8 de paus.



Neste exemplo, uma alternativa para fazer a transposição é ir recolhendo as cartas da matriz inicial, linha a linha, de baixo para cima, em cada linha da direita para a esquerda, sempre com a face identificada para cima e colocando cada linha recolhida abaixo da anterior. Porém, antes montar a matriz transposta, convém inverter a pilha formada e ir revelando as cartas uma a uma, conforme cada coluna da nova matriz é formada. Serão feitas então 3 colunas, cada uma com 4 cartas, e a matriz transposta ficará formada.

***Atividade 3: A cidade ideal***
**Material:** 1 dado e 1 moeda por grupo.
**Objetivos:** Trabalhar o conceito de matriz e introduzir o conceito de multiplicação de matrizes. Revisar operações com números inteiros. Discutir a matemática em situações contextualizadas.

O ensino de matrizes tem sido desafiador para muitos docentes. Conforme Lima (2001) aponta, encontramos em alguns livros didáticos uma abordagem pouco atrativa e desconectada dos problemas do dia a dia. O presente jogo trabalha o assunto de forma contextualizada, de modo que os estudantes percebam a relevância das matrizes em suas vidas. Além disso, o jogo articula outros assuntos da matemática, como as operações com números inteiros, que tantas vezes soam estranhas e misteriosas para os estudantes. No decorrer da atividade, cabe também trabalhar médias aritméticas.

Inicialmente a turma seleciona 5 características importantes de serem avaliadas em uma cidade. Por exemplo: segurança, limpeza, poluição, serviços públicos de saúde e serviços públicos de educação . Num segundo momento, cada grupo atribui uma nota de -5 até 5 para indicar o peso que dão a cada uma das características. Se as opiniões dos integrantes do grupo não forem consensuais, é uma boa oportunidade para se fazer a média aritmética e estabelecer o peso que o grupo em conjunto, atribuirá a cada uma das características. Por exemplo se o grupo considera que o mais importante numa cidade é ela ser segura, a este tópico pode ser atribuído peso 5. Se o grupo entende que poluição é um grande defeito, o peso atribuído a esta característica pode ser -5. Digamos que um determinado grupo tenha estabelecido a pontuação referente a tabela 1.

**Tabela 1**

| Segurança | Limpeza | Poluição | Serviços públicos de saúde | Serviços públicos de Educação |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | -5 | 4 | 3 |

Após esta etapa, cada participante descobrirá como é a sua cidade hipotética, a partir de valores tirados na sorte, usando-se um dado e uma moeda. Vence quem conquistar a cidade hipotética mais bem pontuada, considerando-se todas as características com seus respectivos pesos. Na moeda, convenciona-se cara como positivo e coroa como negativo. Em valor absoluto, cada número de 1 a 5 do dado vale ele mesmo, sendo que o 6 corresponde a zero.

Suponhamos que o grupo tenha quatro componentes. Na primeira rodada, cada jogador descobrirá como é a sua cidade em relação ao primeiro item selecionado, em nosso exemplo, à segurança, jogando o dado e a moeda. Desta forma a primeira coluna da matriz fica preenchida. Em cada nova rodada, as colunas vão sendo preenchidas. A título de ilustração, colocamos um exemplo na tabela 2.

**Tabela 2**

| | Segurança | Limpeza | Poluição | Serviços públicos de saúde | Serviços públicos de Educação |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0 | 4 | 1 | 0 | -1 |
| B | 3 | -1 | -2 | -3 | 0 |
| C | 1 | 2 | -4 | 1 | 1 |
| D | -5 | 3 | -2 | 4 | -2 |

Depois de preenchida a tabela, cada integrante deve descrever a sua cidade para os demais. Por exemplo, a cidade do participante C poderia ser descrita como não muito segura, medianamente limpa, tem um índice de poluição baixo, e serviços públicos de saúde e educação medíocres. A pontuação da cidade imaginária de cada jogador é calculada multiplicando-se a nota de cada característica sorteada pelo peso a ela atribuído e somando-se as 5 parcelas, cada uma referente a uma das características. É interessante neste momento mencionar que o cálculo da pontuação de todas as cidades dos componentes do grupo podem ser realizados por meio de multiplicação de matrizes.

Consideramos então duas matrizes: a matriz A= $(a_{ij})_{4x5}$, cujo elemento $a_{ij}$ indica o peso da característica j, relativa à cidade imaginária do jogador i e a matriz B= $(b_{ij})_{5x1}$, cujo elemento $b_{i1}$ denota o peso dado para característica i. A matriz C=AB possui 4 linhas e uma coluna. O jogador i será considerado vencedor se o elemento $c_{i1}$ for maior ou igual que os outros elementos da matriz C. No exemplo dado teremos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & -2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 36 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Assim, neste exemplo, o jogador C será o vencedor com pontuação 36. É interessante notar que a conta feita para obter 36 foi 1(5)+2(2)+(-4)(-5)+1(4)+1(3)=36. Quando observamos o produto (-4)(-5) notamos que a cidade imaginária do jogador aumentou sua pontuação pelo fato de ser considerada muito pouco poluída e da poluição ter um peso negativo. É um exemplo prático onde evidencia-se o sentido do produto de dois números negativos resultar em um número positivo.

Destacamos que podemos variar a temática de acordo com o interesse da turma e mesmo articular atividades interdisciplinares com outros professores da escola.

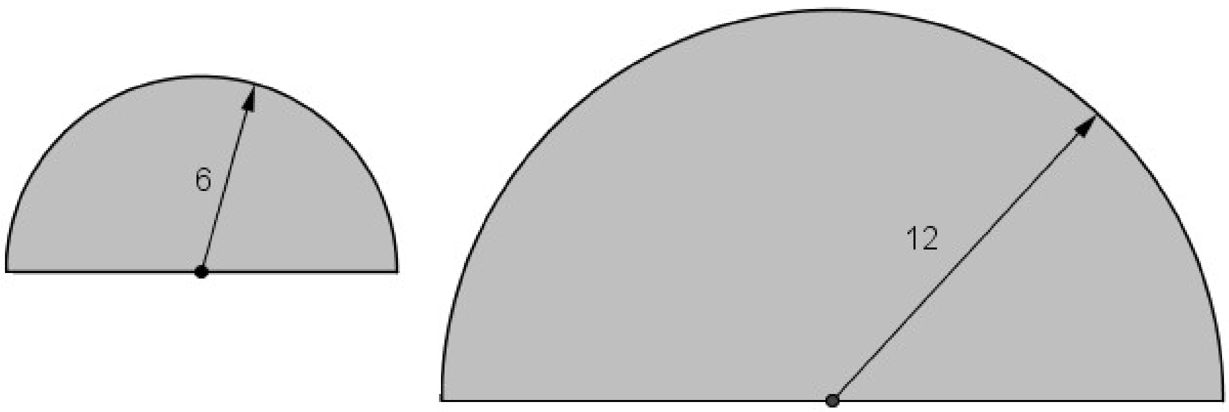
***Atividade 3: Experimentos com volumes***

**Material:** Papel, compasso, régua, material dourado ou multibase 2-3-4.

**Objetivos:**Trabalhar o conceito de volume. Investigar a relação entre os volumes de sólidos semelhantes.

a) Considere um cubinho do material como tendo aresta 1 u.c,(unidade de comprimento) e portanto volume, 1u.v(unidade de volume). Usando o material dourado ou o material multibase, construa um cubo de aresta 2. Qual será o volume deste cubo? Agora construa um cubo de aresta 3. Qual será o volume deste cubo? O que você observa?

b) Construa dois cones vazados, ou seja, em o tampo, que sejam semelhantes. Um deles, construa a partir de um semicírculo de raio 6cm, e outro a partir de um semicírculo de 12 cm. Em seguida, encha o cone menor com bolinhas de isopor e derrame as bolinhas no cone maior tantas vezes quanto forem necessárias até que o cone maior fique cheio. Quantas vezes você precisará realizar esta operação?




Referências:

Almeida, M.F. L.B. P. A., Oliveira, J. *O mágico de Ás* – RPM 54 – SBM . Rio de Janeiro, 2004.

LIMA,E. L. et al.Exame de textos: análise de livros didáticos para o Ensino Médio. SBM. Rio de Janeiro, 2001.