Revisão de lógica e lista de exercícios

Professora Fátima

Considere uma afirmação do tipo "Se A então B". Podemos denotá-la também por

$$A \Rightarrow B$$

(Lê-se também: A implica B)

Chamamos A de hipótese e B de tese ou conclusão.

Exemplo

Afirmação 1 - "Se um inteiro positivo n é ímpar então n^2 é um inteiro positivo ímpar."

A hipótese A é n ser um inteiro positivo ímpar e a tese B é n^2 ser um inteiro positivo ímpar.

Uma afirmação do tipo "Se A então B" é verdadeira quando sempre que a hipótese for verdadeira, a tese também o seja. Uma afirmação é falsa quando não for verdadeira, ou seja, quando existir alguma situação onde a hipótese ocorra, mas a tese não ocorra. Tal situação pode ser exibida como um contra-exemplo, assim basta exibir um contra-exemplo para provar que uma afirmação é falsa.

Para mostrar que uma afirmação é verdadeira não basta dar exemplos. Para se convencer disto considere a afirmação

"Se n é um número natural então n é menor que 1000."

Podemos dar vários exemplos 5, 40, 200 e muitos outros são menores que 1000. Isto não demonstra de jeito nenhum que todos os naturais são menores que 1000. No entanto é fácil provar que a afirmação é falsa. Podemos apresentar como contra-exemplo $n = 1001$ que satisfaz a hipótese pois é um número natural, mas não satisfaz a tese, pois é maior que 1000.

Por outro lado quando ficar provado que é impossível encontrar contra-exemplos, uma afirmação é considerada verdadeira . No Direito isto equivale à máxima *em dúvida, pró réu.* Para ilustrar considere a afirmação

"Se $2n + 1$, com $n \in \mathbf{N}$, é par; então n^2 é par."

Embora a afirmação pareça estranha, ela não é falsa, portanto é verdadeira. Repare que é impossível dar um contra-exemplo (exemplo que satisfaz a hipótese e não satisfaz a tese) já que não existe natural n que satisfaça a hipótese. É importante ressaltar que *para uma afirmação ser verdadeira não é necessário que a hipótese seja sempre verdadeira, mas sim que em todas as vezes que a hipótese for verdadeira, a tese também o seja.*

Salientamos que na lógica que estamos considerando, uma proposição matemática obedece a duas regras básicas:

1. A proposição **não** pode possuir ambos os atributos: ser verdadeira e ser falsa, simultaneamente.

2. A proposição **não** pode ser considerada "nem verdadeira, nem falsa".

Diversas interpretações da afirmação $A \Rightarrow B$.

1. Uma proposição do tipo "Se A então B" é escrita algumas vezes como "B, se A" . Repare que o sentido é o mesmo do anterior, apenas na frase a hipótese A foi dita depois da tese B.

2. Podemos apreender da afirmação "Se A então B", que basta que A ocorra, para garantir a ocorrência de B, ou seja, que *A é uma condição suficiente para B*. Isto quer dizer que para uma afirmação sabidamente verdadeira, se um objeto matemático satisfaz à hipótese, seguramente ele satisfaz à tese, caso contrário este objeto constituiria um contra-exemplo para a proposição, e ela seria portanto falsa.

3. Para fixar idéias considere uma proposição do tipo "Se A então B " verdadeira. Isto significa que todos os objetos matemáticos para os quais a hipótese A é verdadeira, a conclusão B também o é. Se houve algum objeto matemático para o qual B não se verificou, podemos estar certos de que A também não foi verificada para este objeto, pois caso houvesse sido, pelo fato da proposição estar sendo suposta verdadeira, B também se verificaria para este objeto. Assim uma afirmação $A \Rightarrow B$ é equivalente à proposição

   $$\text{não}B \Rightarrow \ \text{não}A$$

   A título de ilustração considere a afirmação:

   "Se uma pessoa nasce no Rio de Janeiro, então ela nasce no Brasil"'

4. Refletindo sobre esta última formulação inferimos que B é uma condição necessária para A, pois um objeto que não satisfaz B, também não satisfaz A. Pelo mesmo motivo usa-se por vezes a expressão *A, somente se B*, pois o único jeito de A ter chances de ocorrer para um objeto é com B ocorrendo para o mesmo, visto que se B não ocorre, certamente A não ocorre.

Recíproca de uma afirmação $A \Rightarrow B$

A recíproca de uma afirmação $A \Rightarrow B$ consiste na afirmação $B \Rightarrow A$.

A proposição $A \Leftrightarrow B$ (lê-se *A se e somente se B*, ou ainda *A é condição necessária e suficiente para B*) significa que que $A \Rightarrow B$(quer dizer *A somente se B*, ou equivalentemente *A é condição suficiente para B*) e **também que** $B \Rightarrow A$ (ou seja,*A, se B*, ou ainda *A é condição necessária para B*.

A negação de uma proposição

A negação de uma proposição P, a qual denotaremos por não P, ou ainda, $\sim P$, possui as seguintes propriedades:

- não P é verdadeira quando P é falsa.
- não P é falsa quando P é verdadeira.

- A negação de não P é o próprio P, isto é, não(não P)= P.

Exercícios:

1. Nas afirmações abaixo, $a, b \in \mathbf{Z}$. Negue as afirmações:
   (a) "$a \neq 0$ e $b \neq 0$"
   Observação: Um objeto matemático satisfaz a condição "C e D", se ele satisfaz a condição C e também satisfaz à condição D.
   (b) "$a = 0$ ou $b = 0$"
   Observação: O "ou" na linguagem matemática é *não exclusivo*. Mais precisamente, um objeto matemático satisfaz à condição "C ou D", se ele satisfaz pelo menos uma das duas condições. Em alguns contextos da língua materna o *ou* aparece com este sentido, com por exemplo no aviso: "Senhoras grávidas ou com crianąs de colo terão prioridade no atendimento". Neste caso, se acontecer pelo menos uma das duas condições, o atendimento será prioritário, e pode haver uma mulher grávida com uma criança no colo. No entanto, é até mais comum a utilização do *ou exclusivo* em nossa língua, como na expressão: "É agora ou nunca".
   (c) "a é par"

2. Decida se cada uma das afirmações 1 e 2 exibidas no texto são verdadeiras ou falsas, justificando.

3. Marque as alternativas corretas, justificando. Se $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow C$ são proposições verdadeiras, podemos concluir que:
   (a) A, B e C são afirmações verdadeiras.
   (b) Se A se verifica então C se verifica.
   (c) Se B ocorre então A ocorre.

4. (Justifique sua resposta !) (Provão 98- Matemática - Questão 2)Uma das afirmações abaixo sobre os números naturais é FALSA. Qual é ela
   (a) Dado um número primo, existe sempre um número primo maior do que ele.
   (b) Se dois números não primos são primos entre si, um deles é ímpar.
   (c) Um número primo é sempre ímpar.
   (d) O produto de três números naturais consecutivos é múltiplo de seis.
   (e) A soma de três números consecutivos é múltiplo de três.

5. Exiba se possível:
   (a) Uma proposição verdadeira, cuja recíproca seja verdadeira.
   (b) Uma proposição verdadeira, cuja recíproca seja falsa.

(c) Uma proposição falsa, cuja recíproca seja falsa.

6. (ENADE 2021) O pensamento de Paulo Freire – a sua teoria do conhecimento – deve ser entendido no contexto em que surgiu o Nordeste brasileiro, onde, no início da década de 1960, metade de seus 30 milhões de habitantes vivia na "cultura do silêncio", como ele dizia, isto é, eram analfabetos. Era preciso "dar-lhes a palavra" para que transitassem para a participação na construção de um Brasil que fosse dono de seu próprio destino e que superasse o colonialismo.

   GADOTTI, Moacir. Paulo Freire: uma bibliografia.
   São Paulo: Cortez, 1996.

   Com base no texto e nas ideias freireanas, avalie as asserções a seguir e a relação proposta entre elas.

   I. Paulo Freire denunciou a opressão e a exclusão gerada pela supressão do direito à educação e à cidadania, defendendo a educação como uma empreitada coletiva.

   PORQUE

   II. A educação deve ser compreendida como um ato político, pois deve incentivar a reflexão e a ação consciente e criativa do sujeito em seu processo de libertação.

   A respeito dessas asserções, assinale a opção correta.

   (a) As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.
   (b) As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.
   (c) A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.
   (d) A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.
   (e) As asserções I e II são proposições falsas.

7. Em cada item abaixo, decida se a proposição é verdadeira ou falsa, justificando a sua resposta.

   (a) Se a e b são inteiros pares, então $a + b$ é inteiro par.
   (b) Se a e b são inteiros ímpares então $a + b$ é inteiro ímpar.
   (c) Se m e n são inteiros ímpares então o produto $m.n$ é ímpar.
   (d) Se o produto de dois inteiros m e n é ímpar, então m e n são inteiros ímpares.
   (e) Se m é múltiplo de 25, então m é múltiplo de 5.
   (f) Se m é múltiplo de 5, então m é múltiplo de 25.
   (g) Se $2 < x < 5$ então $-1 < x < 6$.
   (h) Se $x > -6$ então $-3 < x < 4$.
   (i) Se $-3 < x < 4$ então $x > -6$.
   (j) Se x e y são números reais tais que $xy = 1$, então $x = 1$ ou $y = 1$.

(k) Se x é um número real tal que $x = \sqrt{4}$, então $x = 2$.

(l) Se x é um número real tal que $x^2 = 2$, então $x = \sqrt{2}$.

(m) Se x é um número real tal que $x^2 = 2$, então $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

(n) Se x é um número real tal que $4 \leq x^2 \leq 9$, então x pertence ao intervalo [2,3].

(o) Se x é um número real, então $x^2 \geq -x$.

(p) Se x e y são números reais tais que $x > 100$ e $y > 2$, então $\frac{x}{y} > 50$.

(q) Se x é um número real e $x < 1$, então $x^2 < 1$.

(r) Se x é um número real diferente de zero, então $(-x)$ é negativo.

(s) Se x e y são números reais tais que $x < y$, então $x^2 < y^2$

(t) Se x é um número real, então $\sqrt{x^2} = x$.

(u) Se $x = \sqrt{n}$, sendo n um inteiro positivo, então x é irracional.

(v) Se $\frac{2x+3}{x-1} < 1$ então $x < -4$.

Principal Referência: Malta, I., Pesco, S., Lopes, H. *Cálculo a uma Variável - Volume 1 - Uma Introdução ao Cálculo*. Coleção Matmídia. Editora Puc-Rio.