Derivadas

Professora Fátima

Definção 1 (Derivada) *Sejam $f : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ e $a \in X \subset X'$. A derivada da função f no ponto a é o limite*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Bem entendido, o limite acima pode existir ou não. Se existir,diz-se que f é derivável no ponto a. Quando a derivada$f'(x)$ existir em todos os pontos $x \in X \cap X'$ diz-se que a função $f : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é derivável e obtem-se uma nova função $f' : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ chamada função derivada.

Exercícios:

1. Prove que a derivada de uma constante é zero.

2. Calcule pela definição as derivadas das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x^2$
   (b) $f(x) = x^3$
   (c) $f(x) = \frac{1}{x}$
   (d) $f(x) = \sqrt{x}$
   (e) $f(x) = \text{sen} x$

3. Seja f uma função derivável. Suponha que f' é contínua. Sabe-se que a reta tangente ao gráfico da função f no ponto (3,2) também passa pelo ponto (-2,5). Pede-se calcular $f'(3)$ e determinar se f é crescente em uma vizinhança de 3.

4. Verdadeiro ou falso. Justifique.

   (a) Toda função contínua é derivável.
   (b) Se $f'(p) = 0$ então f assume um máximo ou um mínimo relativo em p.

5. Faça o gráfico de uma função f que possua as seguintes características **simultaneamente**.

(a) Tenha derivada positiva no intervalo]2,5[.
(b) $f(3) = -7$
(c) Não tenha limite em x=8.
(d) $f(8) = 1$

6. Encontre uma fórmula para a derivada da soma e para a derivada do produto de duas funções f e g deriváveis.

7. Sejam f e u funções deriváveis cujo domínio seja $\mathbf{R}$. Prove que $(f(u(x)))' = f'(u(x))u'(x)$

8. Calcule a derivada de $f(x) = \cos x$

9. (Regra de L'Hospital] Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. Suponha também f e g deriváveis em a, com $g'(a) \neq 0$. Prove que:
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

10. Prove que se $f(x) = x^n$, com $n \in N$, então $f'(x) = nx^{n-1}$

11. Prove que se se f é derivável em um ponto P então f é contínua em P.

12. Prove que se $f : U \to \mathbf{R}$ (onde U é um intervalo aberto) é derivável e assume um máximo relativo em $P \in U$, então $f'(P) = 0$.

13. Faça o gráfico de uma função f que possua asseguintes características **simultaneamente**.

    (a) Tenha derivada positiva no intervalo]2,5[.
    (b) $f(3) = -7$
    (c) Não tenha limite em x=8.
    (d) $f(8) = 1$

14. Esboce (se possível) o gráfico de uma função que possua derivada 4 em $x = -2$.

15. Esboce (se possível) o gráfico de uma função estritamente positiva, cuja derivada seja estritamente negativa.

16. Esboce (se possível o gráfico de uma função que não possua nem máximo nem mínimo relativo.

17. Verdadeiro ou falso? Justifique.

    (a) Toda função contínua é derivável?

    (b) Se f'(P)=0 então ou há um máximo relativo, ou há um mínimo relativo em P.

    (c) Se $f''(P) = 0$ então $(P, f(P))$ é ponto de inflexão.

    (d) Se $(P, f(P))$ é ponto de inflexão e f possui segunda derivada então $f''(P) = 0$

18. Como pagamento por um serviço prestado no campo, João recebeu o direito de escolher um pedaço de terra **retangular**.Seu patrão forneceu a ele um barbante de 28 metros de comprimento, o retângulo que João cercasse com tal barbante seria seu ede sua família. Quais as dimensões do retângulo que proporcionam a João um terreno maior possível? Qual o valor da maior área possível para o terreno de João?

19. Maria quer reservar um pedaço **retangular** de 16 m^2 para seu cão feroz. Maria também quer cercar este terreno e sabe queo metro da cerca que deseja (uma cerca com 3 metros de altura, e por cortesia, portão sob encomenda no lugar desejado) custa 10 reais. Quais as medidas do retângulo com 16 m^2 que fariam Maria economizar o mais possível com a cerca?Qual o preço mínimo que Maria pagaria para colocar a cerca que deseja?

20. Com 80m de cerca uma família deseja circundar umaárea retangular junto a um rio para confinar alguns animais,mas sem impedir o acesso ao rio. Quais devem ser as medidas doretângulo para que a área seja a maior possível?

21. Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão.A companhia exigiu de cada passageiro 800 reais mais 10 por cada lugar vago. Para que número de passageirosa rentabilidade da empresa é máxima?

22. Maria é vendedora de picolés. Ela vende, em média, 300 caixas de picolés por 20 reais cada. Entretanto percebeuque, cada vez que diminuía um real no preço da caixa,vendia 40 caixas a mais. Quanto ela deveria cobrar para quea receita fosse máxima?

Teorema 1 (Teorema de Rolle) *Seja* $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *contínua em [a,b] e derivável em (a,b). Suponha que* $f(a) = f(b)$ *Então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$

Teorema 2 (Valor Médio) *Seja* $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *contínua em [a,b] e derivável em (a,b). Então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a))}{b-a}$

Atividade no Winplot:

Atividade 1

1) Escolha o menu dim2, depois equa, depois $y = f(x)$. Digite a função $f(x) = -x^2 + 4x - 1$. Use o domínio $1 \leq x \leq 3$.

2) Escolha o menu dim2, depois equa, depois $x = f(t)$. Faça a reta $(t, 2), 1 \leq t \leq 3$.

3)Calcule $f(1)$ e $f(3)$. Pelo Teorema de Rolle, existe c tal que f'(c)=0. Neste exemplo quem seria c?

4)Considere $f(x) = -x^2 + 4x - 1$, no intervalo $1 \leq x \leq 4$). Trace no Winplot a r reta que passa por $(1, f(1))$ e $(4, f(4))$.

5) Escolha c que satisfaça o Teorema do valor médio. Trace uma reta paralela a r, passando pelo ponto $(c, f(c))$. Interprete geometricamente

Atividade 2:

No menu dim2, two, combination, faça a diferença das funções $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ e $g(x) = -x + 3$, $h(x) = f(x) - g(x)$. Calcule $h(1)$ e $h(4)$. Suponha h definida no intervalo [1,4] e escolha c adequado ao teorema de Rolle. Interprete geometricamente.

Exercícios

1. (Provão 2001 - Questão 27) Segundo o Teorema do Valor Médio, se uma dada função é contínua no intervalo fechado [a,b] e derivável no intervalo aberto (a,b), existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que:

   (a) $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

   (b) $f'(c)$ está entre $f(a)$ e $f(b)$

   (c) $f'(c) = 0$

   (d) $f(b) - f(a) = f'(c)$

   (e) $f'(c) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$

2. Prove o Teorema do Valor Médio. Sugestão: Use o Teorema de Rolle.

3. Verdadeiro ou Falso? Justifique.

   (a) Se $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é contínua em [a,b] e derivável em (a,b), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

   (b) Se $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é contínua em [a,b] e $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

   (c) Se $f : [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é derivável em (a,b) e $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

4. Exiba uma função f que satisfaça as hipóteses do Teorema do Valor Médio, mas não satisfaça as hipóteses do Teorema de Rolle. Se o domínio de f é o intervalo $[a, b]$ exiba c tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$