Cálculo III(FEBF-UERJ)-2024-2.

Fátima(Febf-UERJ)

Definição 1 (Máximo relativo ou local)**.** *Seja* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$*. Um ponto* $p \in \mathbf{R}^2$ *é um ponto onde ocorre um* máximo relativo ou local *de* f *se existe uma vizinhança* $V \subset \mathbf{R}^2$ *de* $p \in \mathbf{R}^2$ *tal que* $f(p) \geq f(q), \forall q \in V$*.*

Definição 2 (Mínimo relativo ou local)**.** *Seja* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$*. Um ponto* $p \in \mathbf{R}^2$ *é um ponto onde ocorre um* mínimo relativo ou local *de* f *se existe uma vizinhança* $V \subset \mathbf{R}^2$ *de* $p \in \mathbf{R}^2$ *tal que* $f(p) \leq f(q), \forall q \in V$*.*

Resultado 1. *Seja* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *com derivadas parciais contínuas. Se* $p \in \mathbf{R}^2$ *for um ponto onde ocorre máximo ou mínimo relativo de* f *, então* $\nabla f(P) = 0$*. Os pontos* p *onde* $\nabla f(p) = 0$ *são chamados pontos críticos.*

No estudo de máximos e mínimos relativos de funções de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ usamos freqüentemente o conceito de derivada. Para funções de mais variáveis não será diferente. O espírito da derivada de funções de $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ é aproximar a função localmente por uma transformação linear.

Definição 3. *Seja* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$*, dada por*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2((x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)),$$

então se $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$Df(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Exercícios: Calcule a derivada das seguintes funções:

1. $f(x, y) = (x^2y^3, x \cos xy)$

2. $g(x, y, z) = (xyz^2, e^{xyz})$

3. $w(x, y) = (xy, \text{sen} x)$

4. Considerando f, g e h como nos ítens acima, calcule $Df(0, 1)$, $Dg(1, 2, 0)$, $Dw(0, 0)$

Definição 4 (Hessiana)**.** *Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ com todas as derivadas parciais contínuas. Definimos a Hessiana de f em p e denotamos $\mathcal{H}_f(p)$ como*

$$\mathcal{H}_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix},$$

ou seja, vendo o gradiente como uma aplicação de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ a hessiana á a derivada do gradiente.

Definição 5 (traço)**.** *O traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal pincipal.*

Resultado 2. *Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, com todas as derivadas parciais contínuas. Se $\nabla f(p) = 0$, $det(\mathcal{H}_f(p)) > 0$ e Traço $(\mathcal{H}_f(p)) > 0$ então há um mínimo relativo em p.*
Se $\nabla f(p) = 0$, $det(\mathcal{H}_f(p)) > 0$ e Traço $(\mathcal{H}_f(p)) < 0$ então há um máximo relativo em p.
Se $\nabla f(p) = 0$, $det(\mathcal{H}_f(p)) < 0$ então p é um ponto de sela (ponto crítico que não é máximo nem mínimo relativo).
Se $\nabla f(p) = 0$ e $det(\mathcal{H}_f(p)) = 0$ devemos buscar outro critério para descobrir se o ponto em questão é ou não um máximo ou mínimo relativo.

Exercício: Para cada uma das funções abaixo, identifique os pontos críticos. Identifique se há máximos relativos, mínimos relativos ou sela.

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$ **Resposta**: (0,0) é ponto de sela.

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2$ **Resposta**: (1,-2) é ponto de mínimo relativo.

3. $f(x, y) = 12xy - 4x^2y - 3xy^2$ **Resposta**: (0,0), (3,0) e (0,4) são pontos de sela, enquanto $(1, \frac{4}{3})$ é ponto de máximo relativo.