Limite de função. Continuidade. Limites laterais

Fátima(Febf-UERJ)

Definição 1 (Ponto de acumulação) *Seja $X \subset \mathbf{R}$. Dizemos que $a \in \mathbf{R}$ é ponto de acumulação de X se para todo intervalo aberto $U \subset \mathbf{R}$ tal que $a \in U$ existe $p \neq a$ tal que $p \in U \cap X$. O conjunto de pontos de acumulação de X é denotado por X'.*

Definição 2 (Limite de função) *Seja $f : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e seja a um ponto de acumulação de X. Diz-se que o número real L é o* limite *de $f(x)$ quando x tende a a e denota-se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição 3 (Continuidade de função em um ponto) *Seja $f : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, seja $a \in X$. Diz-se que f é contínua em a quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Definição 4 (Continuidade de função) *Diz-se que uma função é contínua quando é contínuaem todos os pontos do seu domínio.*

Exercícios

1. Verdadeiro ou falso? Justifique

   (a) Se f é contínua em a então

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

(b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 0$

(c) Sejam $f, g : X \to \mathbf{R}$, $a \in X'$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$. Se $L < M$ então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$, sempre que $0 < |x - a| < \delta$, com $x \in X$.

(d) Sejam $f, g, h : X \to \mathbf{R}$, $a \in X'$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in X - \{a\}$ então $\lim_{x \to a} h(x) = L$

Teorema 1 (Teorema do Sanduíche) *Sejam* $f, g, h : X \to \mathbf{R}$, $a \in X'$ *e* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = L$. *Se* $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in X - \{a\}$ *então* $\lim_{x \to a} h(x) = L$

Teorema 2 *Sejam* $f : X \to \mathbf{R}$ *e* $a \in X'$. *A fim de que seja* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *é necessário e suficiente que, para toda sequência de pontos* $x_n \in X - \{a\}$ *com* $\lim x_n = a$, *tenha-se* $\lim f(x_n) = L$.

Teorema 3 (Unicidade do limite) *Sejam* $f : X \to \mathbf{R}$ *e* $a \in X'$. *Se* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *e* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = M$ *então* $L = M$.

Teorema 4 (Operações com limites) *Sejam* $f, g : X \to \mathbf{R}$, $a \in X'$, *com* $\lim_{x \to a} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a} g(x) = M$. *Então:*

1. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$
2. $\lim\limits_{x \to a} (f(x)g(x)) = LM$
3. $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{L}{M}$, *se* $M \neq 0$

Além disso, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ *e* g *é limitada numa vizinhança de* a *tem-se* $\lim\limits_{x \to a} (f(x)g(x)) = 0$.

Teorema 5 (Valor intermediário) *Seja* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *contínua. Se* $f(a) < d < f(b)$ *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = d$.

Definição 5 *Sejam* $f : X \to \mathbf{R}$, $a \in X'_+$, *onde* $X_+ = \{x \in X$ *tais que* $x > a\}$. *Diz-se que um número real* L *é limite à direita de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a *qando para todo* $\epsilon > 0$ *dado arbitrariamente, pode-se obter* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \epsilon$ *sempre que* $x \in X$ *e* $0 < x - a < \delta$. *Isto é*

$$\lim_{x \to a^+} = L \equiv \forall \epsilon > 0; x \in X \cap (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Definição 6 *Sejam* $f : X \to \mathbf{R}$, $a \in X'_-$, *onde* $X_- = \{x \in X \text{ tais que } x > a\}$. *Diz-se que um número real* L *é limite à esquerda de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a *qando para todo* $\epsilon > 0$ *dado arbitrariamente, pode-se obter* $\delta > 0$ *tal que* $|f(x) - L| < \epsilon$ *sempre que* $x \in X$ *e* $-\delta < x - a < 0$. *Isto é*

$$\lim_{x \to a^-} = L \equiv \forall \epsilon > 0; x \in X \cap (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Teorema 6 *Seja* I *um intervalo aberto tal que* $a \in I$ *e seja* f *uma função definida para* $x \in I - \{a\}$. *Temos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \textit{existirem } \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \textit{ e } \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \end{cases}$$

Exercícios

1. Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 4x + 1, & \text{se } x < 1 \end{cases},$$

faça seu gráfico e calcule, caso exista:

(a) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

2. Dada a função f definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \in \mathbf{R}^*$. Faça o gráfico e calcule caso exista

(a) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$

(b) $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Definição 7 (ponto aderente) *Diz-se que um ponto* $a \in \mathbf{R}$ *é aderente ao conjunto* $X \subset \mathbf{R}$ *quando* a *é o limite de alguma sequência* $x_n \in X$.

Definição 8 (fecho) *Chama-se fecho de um conjunto ao conjunto* $\overline{X}$ *formado por todos os pontos aderentes a X.*

Definição 9 (fechado) *Um conjunto* $X \subset \mathbf{R}$ *diz-se fechado quando* $X = \overline{X}$

Definição 10 (conjunto compacto) *Um conjunto* $X \subset \mathbf{R}$ *é dito compacto quando é limitado e fechado.*

Definição 11 (Ponto interior) *Diz-se que um ponto* a *é interior ao conjunto* $X \subset \mathbf{R}$ *quando existe um número real* $\epsilon > 0$ *tal que o intervalo aberto* $(a-\epsilon, a+\epsilon) \subset X$. *Denominaremos interior de* X *e denotaremos por* $int(X)$, *o conjunto de todos os pontos interiores a* X.

Definição 12 (Vizinhança) *Quando* $a \in int(X)$ *diz-se que* X *é uma vizinhança do ponto* a.

Definição 13 (aberto) *Um conjunto* $A \subset \mathbf{R}$ *chama-se aberto, quando* $A = int(A)$, *isto é quando todos os pontos de* A *são interiores a* A.

Exercícios:

1. Para cada um dos conjuntos $X \subset \mathbf{R}$ abaixo, determine $int(X)$ e diga se o conjunto é aberto. Determine também $\overline{X}$ e diga se o conjunto é fechado. Para cada um dos conjuntos calcule X'. Diga se cada um dos conjuntos é limitado. Diga se cada um dos conjuntos é compacto.

   (a) $X = \{1, 2, \ldots, n\}$
   (b) $X = (a, b) =]a, b[$
   (c) $X = (-\infty, b)$
   (d) $X = (a, \infty)$
   (e) $X = [a, b]$
   (f) $X = [c, \infty)$
   (g) $X = (-\infty, d)$
   (h) $X = (-\infty, d]$
   (i) $X = \{2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\}$
   (j) $X = \mathbf{N}$

(k) $X = \mathbf{Q}$

(l) $X = \emptyset$

(m) $X = \mathbf{R}$

2. Dê exemplo, se possível de um conjunto fechado, cujo complementar seja aberto.

3. Dê exemplo, se possível de um conjunto aberto, cujo complementar seja fechado.

4. Dê exemplo, se possível de um conjunto fechado, cujo complementar seja fechado.

5. Dê exemplo, se possível de um conjunto aberto, cujo complementar seja aberto.

Teorema 7 *A imagem $f(X)$ de um conjunto compacto $X \subset \mathbf{R}$ por uma função contínua $f : X \to \mathbf{R}$ é um conjunto compacto.*

Corolário: Se $X \subset \mathbf{R}$ é compacto então toda função $f : X \to \mathbf{R}$ é limitada, isto é , existe $c > o$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in X$.