Vetor gradiente. Propriedades

Fátima(Febf-UERJ)

Funções diferenciáveis e Gradiente

1 Correção dos exercícios

1. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ em um ponto (x, y) para as seguintes funções:
   (a) $f(x, y) = h(x) + g(y)$ **Resposta**: $h'(x)$
   (b) $f(x, y) = h(x)g(y)$ **Resposta**: $g(y)h'(x)$
   (c) $f(x, y) = 3x^2 + 5\text{sen}(xy^2) + 3$ **Resposta**: $6x + 5y^2 \cos(xy^2)$
   (d) $f(x, y) = x^4y^3 + y^2 \cos x$ **Resposta**: $4y^3x^3 - y^2\text{sen}x$
   (e) $f(x, y) = x^2 + y^2$ **Resposta**:$2x$
2. Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}$ em um ponto (x, y) para as seguintes funções:
   (a) $f(x, y) = h(x) + g(y)$ **Resposta**: $g'(y)$
   (b) $f(x, y) = h(x)g(y)$ **Resposta**: $h(x)g'(y)$
   (c) $f(x, y) = 3x^2 + 5\text{sen}(xy^2) + 3$ **Resposta**: $10xy \cos(xy^2)$
   (d) $f(x, y) = x^4y^3 + y^2 \cos x$ **Resposta**: $3x^4y^2 + 2y \cos x$
   (e) $f(x, y) = x^2 + y^2$ **Resposta**: $2y$

2 Funções Diferenciáveis

A noção de função diferenciável que apresentamos agora é a extensão do conceito de derivada de funções reais para o caso de funções $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

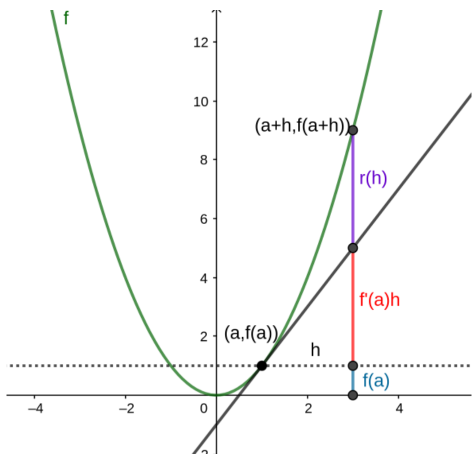
Definição 1 (função diferenciável)**.** *Seja $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Seja $a \in U$. Diremos que a função f é* diferenciável *no ponto a quando existirem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ e além disso, para todo vetor $v = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$, com $a + v \in U$, se tenha*

$$f(a+v) = f(a) + < \nabla f(a), v > + r(v), \quad \textit{com } \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0$$

onde $< u, v >$ denota o produto escalar entre dois vetores u e v e

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$$

Observação: Repare que para funções $f : U \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ temos:



$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + r(h), \text{ com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \\
&\Leftrightarrow f(a+h) - f(a) = f'(a)h + r(h), \text{ com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) + \frac{r(h)}{h}, \text{ com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} f'(a) + \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h}, \text{ com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)
\end{aligned}$$

Clique aqui para ver o aplicativo

Exercícios:

1. Seja $v = te_1$. Use a definição de derivada para funções $f : U \subset \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ para concluir que a derivada direcional de f na direção e_1 é a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

2. Seja $v = te_2$. Use a definição de derivada para funções $f : U \subset \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ para concluir que a derivada direcional de f na direção e_2 é a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

3. Use a definição de derivada para funções $f : U \subset \mathbf{R^2} \to \mathbf{R}$ para concluir que para u não nulo

$$< \nabla f(a), u >= \frac{\partial f}{\partial u}(a)$$

Sugestão: Use $v = tu$

3 Gradiente

Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ diferenciável. Definimos como gradiente de f em um ponto P e denotamos $\nabla f(P)$ ou grad f (P) ao vetor

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P)\right)$$

Clique aqui para abrir o aplicativo

1. Calcule o gradiente em um ponto (x,y) para cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = h(x)g(y)$

   (b) $f(x, y) = 3x^2 + 5\text{sen}(xy^2) + 3$

   (c) $f(x, y) = x^4y^3 + y^2 \cos x$

   (d) $f(x, y) = x^2 + y^2$

2. Nesta questão $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ é diferenciável, u é um vetor não nulo de $\mathbf{R}^2$. Verdadeiro ou falso? Justifique.

(a) $\nabla f(P).u = \frac{\partial f}{\partial u}(P)$

(b) Seja $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$. Então:

$$[f(c(t))]' = \nabla f(c(t)).c'(t)$$

(c) Seja $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Seja $c(t)$ uma curva de nível de f, ou seja, $f(c(t)) = k$, onde k é constante. Então $\nabla f(c(t)).c'(t) = 0$

3. A altura do vulcão havaiano Mauna Loa é de maneira aproximada descrita pela função

$$h(x, y) = 2.59 - 0.00024y^2 - 0.00065x^2,$$

onde h é a altura acima do nível do mar em milhas e x e y medem as distâncias leste-oeste, e norte-sul em milhas com relação ao topo da montanha. Partindo do ponto (-2,-4), qual direção deve ser tomada para que a altura cresça o mais rapidamente?