

Atividades investigativas em Geometria Espacial

Professora Fátima

1 A ideia intuitiva de volume:

Arquimedes viveu na Grécia antiga, e foi protagonista de um dos mais célebres problemas envolvendo o conceito de volume. O rei Heron II, ao assumir o trono de Saracusa havia encomendado uma coroa de ouro puro. Pouco depois, surgiu no reino o boato de que o ourives teria roubado uma parte do ouro, substituindo-o por prata na coroa. Numa primeira averiguação, constatou-se que o peso da coroa coincidia com o peso da barra de ouro entregue para a sua confecção, mas o rei continuou apreensivo e decidiu recorrer a Arquimedes. Atordoado com o desafio, o sábio decidiu relaxar um pouco na casa de banhos. Ao afundar o corpo na banheira, notou que uma certa quantidade de água se esparramou no chão, e neste momento ele teve a idéia para resolver o problema. Dizem que ele abandonou a banheira e teria saído pelas ruas exclamando: “eureka!, eureka”, o que significa: “descobri!, descobri!”. Para descobrir se houve ou não a fraude, Arquimedes realizou o que veio a ser considerado mais tarde um engenhoso experimento científico:

- Inicialmente, encheu uma vasilha até a borda e mergulhou nela uma barra de ouro puro do mesmo peso da coroa, e mediu o volume da água derramada.
- Repetiu a experiência, desta vez colocando uma barra exclusivamente de prata, com o mesmo peso da coroa. Ele constatou que a quantidade de água derramada foi maior desta última vez. Isto significa que o volume da barra de prata era maior do que o da de ouro, embora ambas tivessem o mesmo peso.
- Finalmente mergulhou a coroa na mesma vasilha repleta de água. Ela deslocou mais água que a barra de ouro, e menos água que a barra de prata, desmascarando a fraude do ourives. Se a coroa fosse apenas de ouro, ela deveria deslocar a mesma quantidade de água deslocada pela barra de ouro.

Esta pequena lenda ilustra a importância de se conhecer o conceito de volume na solução de problemas práticos.

Atividade 1.1 Nesta atividade trabalharemos o conceito de volume. Cada grupo da turma é convidado a construir uma "obra" com o material dourado e/ou com o multibase, e em seguida calcular seu volume, usando como unidade o cubinho menor.

2 Paralelepípedos

Atividade 2.1 Utilizando o material dourado ou com o multibase, cada grupo é instado a construir 3 paralelepípedos retângulos, e preencher a tabela com os dados obtidos.

Sólidos	área da base	altura	Volume
Primeiro			
Segundo			
Terceiro			

Tabela 1: Paralelepípedos retângulos

Inspirados nos exemplos da tabela 2, formule uma conjectura para o cálculo do volume de um paralelepípedo retângulo, conhecendo-se a área da base e a altura.

Atividade 2.2 Monte, com o material concreto, três caixas, todas com o mesmo volume, digamos 60 u. v. e calcule a superfície total de cada uma delas. Pergunta: Caixas de mesmo volume possuem necessariamente a

Caixas	dimensões	área total	Volume: 60 u.v
Primeira			
Segunda			
Terceira			

Tabela 2: Caixas de mesmo volume

mesma área total?

Princípio de Cavalieri: Dados dois sólidos incluídos entre um par de planos paralelos, se a interseção de todos os planos paralelos a eles com cada um dos sólidos ocorrer e possuir a mesma área, então os volumes dos sólidos coincidirão."

Atividade 2.3 Experimento com cartas: Faça duas pilhas de mesma altura com cartas de um baralho e as coloque sobre a mesa, de modo que cada uma delas possa ser vista como um paralelepípedo retângulo. Em seguida, incline ligeiramente uma das pilhas, formando ainda um paralelepípedo. Qual dos dois sólidos possui maior volume? Justifique.

3 Prismas e Cilindros

Usando o princípio de Cavalieri, podemos intuir como seriam os volumes de prismas e cilindros. Para ilustrar o raciocínio, realizaremos as seguintes atividades:

Atividade 3.1: Considere uma caixa cuja base seja um quadrado de lado 4 u.c. e a altura valha 3 u.c. Qual é o volume desta caixa? Monte, a partir de uma planificação, a caixa "vazada" sem um dos tampos.

Clique aqui para acessar um molde da caixa

Atividade 3.2: É possível montar um triângulo que possua a mesma área de um quadrado de área 4? Em caso positivo, exiba alguns exemplos, identificando a base e a altura do triângulo mencionado.

Atividade 3.3 Monte um prisma cujo triângulo da base seja um triângulo retângulo de catetos 8 u.c. e 4 u.c e que possua altura 3 u. c. Qual é a área de triângulo da base. Monte, a partir de uma planificação, o prisma "vazado" sem um dos tampos.

Clique aqui para acessar um molde do prisma

Em seguida, compare o volume deste prisma com o volume da caixa anterior. Para isto, podemos transferir bolinhas de isopor de um sólido vazado para o outro. O que você percebe? Use o princípio de Cavalieri para generalizar o que observamos neste exemplo.

Atividade 3.4 Monte um cilindro circular reto cujo círculo da base tenha área 16 u.a. e cuja a altura seja 3 u.c. Qual é o raio do círculo da base? Monte, a partir de uma planificação, o cilindro "vazado" sem um dos tampos. Clique aqui para acessar um molde do cilindro

Em seguida, compare o volume deste cilindro com o volume da caixa e do prisma anteriores. Para isto, podemos transferir bolinhas de isopor de um sólido vazado para o outro. O que você percebe? Use o princípio de Cavalieri para generalizar o que observamos neste exemplo.

Atividade 3.5 Calcule a superfície total de cada um dos sólidos: caixa, prisma e cilindro, incluindo os tampos que foram omitidos.

4 Pirâmides e Cones

Iremos agora relacionar o volume de uma pirâmide com o volume de um prisma de mesma área da base e mesma altura que ela. Analogamente, iremos relacionar o volume de um cone, com o volume de um cilindro de mesma área da base e mesma altura.

Atividade 4.1 Monte, a partir de uma planificação, uma pirâmide "vazada" cuja base seja um triângulo retângulo de catetos 8 u.c. e 4 u.c e que possua altura 3 u. c. Em seguida, compare o volume desta pirâmide, com o do prisma de mesma área da base e mesma altura que ela, construído anteriormente. Para isso, use bolinhas de isopor, que devem ser transferidas da pirâmide para o prisma, quantas vezes sejam necessárias para cobrir o volume do prisma. O que você observa?

Atividade 4.2 Monte um cone com altura 3 u.c. e cujo círculo tenha área 4, porém deixe ele "vazado", para que possamos realizar o experimento. Em seguida, compare o volume deste cone com o do cilindro de mesma área da base e mesma altura que ele. Para isso, use novamente bolinhas de isopor, que devem ser transferidas da cone para o cilindro, quantas vezes sejam necessárias para cobrir o volume do prisma. O que você observa?

Atividade 3.5 Calcule a superfície total da pirâmide e do cone, incluindo os tampos que foram omitidos.

5 Esfera

Para investigarmos o volume de uma esfera de raio R , podemos inscrevê-la em um cilindro de raio R e altura $2R$. Num cilindro idêntico a este, podemos inscrever um cone duplo, cujo centro coincidiria com o centro da esfera inscrita (caso estivessem no mesmo cilindro), e a base de cada ramo é um círculo que coincide com o círculo da base do cilindro.

Atividade 4.1 Calcule o volume do cilindro e o volume do cone duplo, em função de R

Em nosso experimento, verificaremos que o espaço existente entre o cilindro e o cone duplo, é equivalente ao volume de uma esfera. Para montarmos o experimento, compramos uma bolinha oca e a partimos ao meio. Verificamos o raio desta esfera, e o chamamos de R . Em seguida construímos um cilindro com este mesmo raio, e altura também R , porém, sem o tampo de cima. Metade da esfera, poderia ser inscrita nele. Construímos também um cone

de raio R e altura R , que da mesma forma pode ser inscrito neste cilindro. Colamos a base do cone na base do cilindro.

Atividade 4.2 No experimento, preencha a esfera oca com bolinhas de isopor e despeje no espaço entre o cone e o cilindro, do artefato descrito acima. O que você observa?

Atividade 4.3 Observando que o volume da esfera é aquele ocupado pelo sólido formado entre o cilindro de raio R e altura $2R$ e o cone duplo nele inscrito, conforme mencionado anteriormente, calcule o volume da esfera de raio R , em função de R .

Atividade 4.4 Como poderíamos calcular a área da esfera? Uma maneira é imaginarmos duas esferas concêntricas, uma de raio R e outra de raio $R + h$. Inicialmente calculamos o volume da região situada entre as esferas, e aceitamos que ela seria aproximadamente a área da esfera multiplicada por uma altura h . Notamos que quanto h vai se aproximando de zero, nossa aproximação vai se tornando mais aceitável. Fazendo o limite quando h tende a zero, obtemos a área da esfera.