Derivada Direcional. Derivada Parcial.

Fátima(Febf-UERJ)

Derivada direcional e derivada parcial

Estudaremos maneiras de estender o conceito de derivada de funções $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, aprendido em cálculo 1, para funções onde o domínio é $\mathbf{R}^n$, $n > 1$. Sabemos que a derivada em um ponto p de uma a função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é dada por:

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

e indica, grosso modo, o quanto a função f está crescendo ou decrescendo numa vizinhança de p.

Examinaremos em primeiro lugar os conceitos de derivada direcional, derivada parcial e gradiente para funções $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, com forte apelo geométrico. A generalização para funções do tipo $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ é análoga.

Comecemos examinando o conceito de derivada direcional em um ponto p, segundo a direção de um vetor v.

Definição 1 (Derivada Direcional) *Chamamos de derivada direcional em um ponto p segundo uma direção v e denotamos por $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ ao seguinte limite:*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

No aplicativo abaixo, podemos observar uma interpretação geométrica para a derivada direcional da função $f(x) = -x^2 - y^2 + 10$ no ponto $p = (1,1)$ na direção do vetor $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$. A figura mostra a curva $\varphi(t) = (p + tv, f(p + tv)) = (p_1 + tv_1, p_2 + tv_2, f(p + tv))$ e a reta tangente a superfície em $(p_1, p_2, f(p_1, p_2))$ cuja equação é dada por $r(t) = (p_1, p_2, f(p_1, p_2)) + t(v_1, v_2, \frac{\partial f}{\partial v}(p))$.

Clique aqui para ver o aplicativo no Geogebra

Observação 1 *Se v é um vetor unitário a derivada direcional indica o quanto a função está crescendo ou decrescendo em P quando seguimos a direção do vetor v.*

Exemplos:

1. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. Calcule em cada caso a derivada direcional indicada $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$.
2. $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $p = (0,0)$ **Resp**:0
3. $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$, $p = (0,0)$ **Resposta**:0
4. $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$, $p = (0,0)$ **Resposta**:0
5. $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0)$, $p = (0,0)$ **Resposta**:0
6. $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1)$, $p = (0,0)$ **Resposta**:0
7. $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $p = (1,2)$ **Resposta**: $3\sqrt{2}$
8. $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$, $p = (3,1)$ **Resposta**: $2\sqrt{2}$
9. $v = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$, $p = (1,1)$ **Resposta**: $6\frac{\sqrt{5}}{5}$
10. $v = (1,0)$, $p = (2,1)$ **Resposta**: 4
11. $v = (0,1)$, $p = (2,1)$ **Resposta**: 2

Definição 2 (Derivada parcial) *A derivada direcional na direção dos vetores da base canônica recebem o nome especial de* derivada parcial. *Seja* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x}(p)$$

onde $e_1 = (1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial e_2}(p) = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

onde $e_2 = (0,1)$

Figura 1: $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 10$, $p = (2,3)$, $v = (1,0)$

Figura 2: $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 10$, $p = (2,3)$, $v = (0,1)$

As figuras (1) e (2) ilustram respectivamente as derivadas parciais da função $f(x,y) = -x^2 - y^2 - 10$ no ponto (2,3) em relação a x e em relação a y.

1. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ em um ponto (x,y) para as seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = h(x) + g(y)$

   (b) $f(x,y) = h(x)g(y)$

   (c) $f(x,y) = 3x^2 + 5\text{sen}(xy^2) + 3$

   (d) $f(x,y) = x^4y^3 + y^2 \cos x$

   (e) $f(x,y) = x^2 + y^2$

2. Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}$ em um ponto (x, y) para as seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = h(x) + g(y)$

   (b) $f(x, y) = h(x)g(y)$

   (c) $f(x, y) = 3x^2 + 5\text{sen}(xy^2) + 3$

   (d) $f(x, y) = x^4y^3 + y^2 \cos x$

   (e) $f(x, y) = x^2 + y^2$