Supremo. Ínfimo. Axioma do supremo.

Fátima(Febf-UERJ)

Definição 1 (cota superior) *: Seja $A \subset \mathbf{R}$. Dizemos que k é uma* cota superior *para A se todo elemento de A for menor ou igual a k, ou seja,*

$$x \leq k, \ \forall x \in A.$$

Obs: Se um conjunto possui uma cota superior então ele possui várias cotas superiores. Dizemos que um um subconjunto de $\Re$ é limitado superiormente quando ele admite cotas superiores.

Definição 2 (cota inferior) *: Seja $A \subset \mathbf{R}$. Dizemos que k é uma* cota inferior *para A se todo elemento de A for maior ouigual a k, ou seja,*

$$k \leq x, \ \forall x \in A.$$

Se um conjunto possui uma cota inferior então ele possui várias cotas inferiores. Dizemos que um subconjunto de $\Re$ é limitado inferiormente quando ele admite cotas inferiores.

Exemplo: Seja $A = \{1, 2, 3\}$. 3,5,9 e 500 são cotas superiores (qualquer número maior ou igual a 3 é cota superior). 1,0,-10 são cotas inferiores (qualquer número menor ou igual a 1 é cota inferior).

Definição 3 (supremo) *Seja $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$. Dizemos que $a \in \mathbf{R}$ é o* supremo *de A e denotamos $a = supA$ se a é a menor das cotas superiores. Isto é equivalente as seguintes afirmações ocorrerem simultaneamente:*

1. *$x \leq a, \forall x \in A$ (a é uma cota superior)*
2. $$c \geq x, \ \forall x \in A \Rightarrow c \geq a,$$

   ou equivalentemente,

   $$c < a \Rightarrow \exists x \in A \text{ tal que } c < x.$$

   ($a = supA$ é a menor das cotas superiores)

Quando o supremo de um conjunto é um de seus elementos, ele é denominado também o **máximo** *deste conjunto.*

Analogamente definimos ínfimo de um conjunto A.

Definição 4 (ínfimo) *: Seja $A \subset \mathbf{R}$ um subconjunto dos números reais. Dizemos que $a \in \mathbf{R}$ é o* ínfimo *de Ae denotamos $a = infA$ se a é a maior das cotas inferiores, isto é, quando ocorrem simultaneamente:*

1. $a \leq x, \ \forall x \in A$ *(a é uma cota inferior)*
2. $$c \leq x, \forall x \in A \Rightarrow c \leq a,$$
   ou equivalentemente,
   $$c > a \Rightarrow \exists x \in A \textit{ tal que } c > x.$$
   (a é a maior das cotas inferiores)

Quando o ínfimo de um conjunto é um de seus elementos, ele é denominado também o **mínimo** *deste conjunto.*

Exercícios:

1. Determine caso haja, ínfimo, supremo, máximo, mínimo de cada um dos conjuntos abaixo. Caso não haja, justifique.
   (a) $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
   (b) $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
   (c) $A =]-3, 5] \cup]-1, 7]$
   (d) $X = \{(-1)^n \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\}$
   (e) $X =]-\infty, 0[$
   (f) $B = \{3\}$
   (g) $X = [-1, 2[$
   (h) $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
   (i) $X =]-\infty, 7[$
   (j) $X = \{0, -2, 7, 5\}$

(k) $X = [2, 10]$

(l) $A = \{\frac{1}{n}, n = 1, 2, \ldots\}$

Completude de $\Re$: $\Re$ é um corpo ordenado **completo**. Isto significa que vale o axioma do supremo: todo subconjunto não vazio $X \subset \mathbf{R}$ limitado superiormente possui supremo $b \in \mathbf{R}$.