Superfícies especiais

Professora Fátima

1 Planos

Equação:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Exercícios:

1. Calcule a, b, c, d quando o vetor normal ao plano é o vetor (1, 2, 3) e o plano passa no ponto (0, 1, 2). Determine os traços (interseção da superfície com os planos coordenados). Confira no Geogebra.

2. Qual é o vetor normal ao plano do item anterior?

3. Calcule d quando o plano passa no ponto (p_1, p_2, p_3). Confira no Geogebra.

4. Qual é o vetor normal ao plano do item anterior?

2 Cilindros e superfícies de revolução

Definição 1 (Cilindro) *Um cilindro é uma superfície gerada por uma reta L, chamada geratriz do cilindro, que se move ao longo de uma curva plana C, denominada diretriz do cilindro. A diretriz não pode estar no mesmo plano da curva.*

Exercícios: Para cada uma das equações abaixo, esboce o gráfico da superfície em R^3. Em caso de ser um cilindro, identifique uma reta geratriz e a curva plana, apontando o plano onde esta última se encontra.

1. $x^2 + y^2 = 4$

2. $y = 8x^2$

3. $z = \text{sen } y$

4. $z - e^x = 0$

Definição 2 (Superfície de Revolução) *Uma superfície obtida pela rotação de uma curva plana, chamada geratriz, em torno de uma reta fixa que pertença ao plano, denominada eixo, é chamada de superfície de revolução.*

As superfícies de revolução são de alguma das seguintes formas:

- $x^2 + z^2 = (f(y))^2$ ou
- $y^2 + z^2 = (f(x))^2$ ou
- $x^2 + y^2 = (f(z))^2$ Clique aqui para visualizar

1. Encontre a superfície de revolução obtida a partir da parábola $z = x^2$ em torno do eixo z.

2. Considere a superfície de revolução de equação $\ln(x^2 + z^2) = -2y$.

   (a) Determine o eixo de revolução. Dica: Deduza que a equação da superfície pode ser escrita como $x^2 + z^2 = e^{-2y}$

   (b) Determine a curva geratriz num dos planos coordenados que contém o eixo de revolução.

   (c) Esboce o gráfico da superfície. Clique aqui para visualizar
   Dica: Para visualizar no Geogebra, parametrize a equação $x^2 + z^2 = e^{-2y}$, utilizando os parâmetros r e t, de modo que $x = r\cos(t)$ e $z = r\text{sen}t$. Como $x^2+z^2 = r^2$ e $x^2+z^2 = e^{-2y}$, vem que $r^2 = e^{-2y}$. Assim:

$$\begin{aligned} r^2 = e^{-2y} &\Rightarrow \ln(r^2) = \ln(e^{-2y}) \\ &\Rightarrow 2\ln(r) = -2y\ln(e) \\ &\Rightarrow y = -\ln(r) \end{aligned}$$

   Logo, a parametrização fica:

$$\{(r\cos(t), -\ln(r), r\ \text{sen}(t)), 0 \leq t \leq 2\pi, r > 0\}$$

3 Superfícies Quádricas

Lembrete: O gráfico no plano de uma equação do tipo:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

é uma cônica (parábola, elipse, circunferência, hipérbole) ou alguma forma degenerada destas curvas, como um ponto, um conjunto vazio ou um par de retas. Exercício: Escolha adequadamente os coeficientes de modo a obter cada uma das seguintes cônicas e a identifique.

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
2. $x^2 + y^2 = 16$
3. $x^2 - y^2 = 1$
4. $y^2 - x = 0$

Quádrica: O gráfico de uma equação de segundo grau nas variáveis x, y e z da forma:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + J = 0$$

é uma quádrica.

Quádricas centrais:

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$$

- Se todos os sinais do membro esquerdo são positivos, trata-se de um elipsóide. Se, além disso, a=b=c, temos uma esfera.
- Se apenas um dos sinais no lado esquerdo é negativo, temos um hiperbolóide de uma folha.
- Se exatamente dois sinais forem negativos, temos o hiperbolóide de duas folhas.

Cones elipticos

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=0, \quad a,b,c>0,$$

com nem todos os sinais do lado esquerdo sendo iguais.

Parabolóides elipticos e hiperbólicos:

Apresentam-se em alguma das três formas abaixo:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=z,\ \pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=x,\ \pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=y, \quad a,b,c>0,$$

- Se ambos os sinais do membro esquerdo forem iguais, trata-se de um parabolóide eliptico.
- Se os sinais do membro esquerdo forem diferentes, trata-se de um parabolóide hiperbólico.