Sequências. Sequência monótona. Sequência limitada. Sequência convergente

Fátima(Febf-UERJ)

Uma sequência é uma função $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$,que a cada número natural associa um número real. Frequentementenos referimos a uma sequência por x_n, indicando que x_1 seria o primeiro termo, x_2 o segundo termo e assim por diante.

Definição 1 (Sequência Limitada) *Uma sequência x_n é dita* limitada *quando existe $M \in \mathbf{R}$tal que $-M \leq x_n \leq M$, $\forall n \in \mathbf{N}$.*

Observação:

$$-M \leq x_n \leq M,\ \forall n \quad \Leftrightarrow \quad |x_n| \leq M, \forall n$$

.

Definição 2 (Sequência monótona) *Uma sequência (x_n) chama-se monótona quando se tem $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$, isto é:*

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k \leq \ldots$$

ou *então $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbf{N}$, isto é,*

$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k \geq \ldots$$

No primeiro caso diz-seque (x_n) é monótona não-decrescente e, no segundo, que (x_n)é monótona não-crescente.

Definição 3 (Limite de uma sequência) *Dizemos que $L \in \mathbf{R}$ é o limite de uma sequência e denotamos*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \quad ou \ \lim x_n = L$$

quando dado $\epsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$L - \epsilon < x_n < L + \epsilon, \quad \forall n > N_0$$

Neste caso diz-se que a sequência (x_n) é convergente (para L). Quando uma sequência não é convergente ela é dita divergente.

Observação:

$$L - \epsilon < x_n < L + \epsilon, \quad \forall n > N_0 \quad \Leftrightarrow \quad |x_n - L| < \epsilon, \ \forall n > n_0$$

Observação: É possível denotarmos o limite de uma sequência, conforme apontamos na definição de limite acima, devido ao importante resultado abaixo, referente à unicidade do limite.

Teorema 1 (Unicidade do limite) *Uma sequência não pode possuir dois limites distintos.*

Definição 4 (Subsequência) *Dada uma sequência $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$de números reais, uma subsequência de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito*

$$\mathbf{N}' = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots\} \text{ de } \mathbf{N}.$$

Escreve-se $x' = (x_n)_{n \in \mathbf{N}'}$, ou $(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$,ou ainda $(x_{ni})_{i \in \mathbf{N}}$

Observação: Estritamente falando, uma subsequência x' nãoé uma sequência pois seu domínio $\mathbf{N}'$ não éem geral igual a $\mathbf{N}$. Mas é trivial considerar x' como função definida em $\mathbf{N}$, como sugere a última notação apresentada na definição de subsequência. **Exercícios**:

1. Dê exemplo de uma sequência não limitada mas que possua uma subsequência convergente.

2. Dê exemplo de uma sequência monótona decrescente que não seja convergente.

3. Dê exemplo de uma seqëncia que não seja monótona mas que convirja.

4. Dê exemplo de uma sequência divergente que possua uma subsequência convergindo para 2.

5. Exiba 3 subsequências distintas para sequência $a_n = \frac{1}{n}$

6. Determine os 3 primeiros termos de cada sequência. Diga se cada uma das sequências abaixo é limitada,monótona, convergente. Justifique.

   (a) $x_n = 3$

   (b) $x_n = -n$

   (c) $x_n = (-1)^n$

   (d) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

   (e) $x_n = 2^n$,

   (f) $x_n = (-2)^n$,

   (g) $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

   (h) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$,

   (i) $x_n = \frac{n^2-n}{n^3+3}$

7. Em cada item ou dê um exemplo, explicando que seu exemplo é correto ou justifique porque é impossíveldar um exemplo.

   (a) Uma sequuência monótona decrescente que não seja convergente.

   (b) Uma sequência que não seja monótona mas que convirja.

   (c) Uma sequência não monótona que seja convergente.

   (d) Uma sequência que seja limitada, mas não seja convergente.

   (e) Uma sequência que seja convergente, mas não seja limitada.

   (f) Uma sequência crescente que seja convergente.