Teorema de Bolzano-Weierstrass. Propriedades de limites. Sequência de Cauchy.

Fátima(Febf-UERJ)

Teorema 1 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Teorema 2 (Bolzano-Weierstrass) *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

Teorema 3 *Se* $\lim x_n = \lim y_n = L$ *e* $x_n \leq z_n \leq y_n$ *para todo* n *suficientemente grande então* $\lim z_n = L$

Teorema 4 *Se* $\lim x_n = 0$ *e* (y_n) *é uma sequência limitada(convergente ou não) então* $\lim(x_n y_n) = 0$

Teorema 5 *Se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim y_n = b$ *então:*

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$
2. $\lim(x_n y_n) = ab$
3. $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$

Definição 1 (Sequência de Cauchy) *Dizemos que uma sequência* (x_n) *é de Cauchy quando dado* $\epsilon > 0$*, existe um natural* n_0 *tal que*

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$$

Teorema 6 *Toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy.*

Teorema 7 *Toda sequência de Cauchy converge.*

Exercícios:

1. Dê exemplo de uma sequência que seja monótona e limitada. Sua sequência converge?
2. Dê exemplo de uma sequência que seja monótona, mas não seja limitada. Sua sequência converge?
3. Dê exemplo de uma sequência convergente, que seja limitada, mas não seja monótona.
4. Dê exemplo de uma sequência divergente, que seja limitada, mas não seja monótona.
5. Exiba uma subsequência convergente da sequência $x_n = (-1)^n$.
6. Dê exemplo de uma sequência ilimitada que possua uma sequência convergente.
7. Dê exemplo de uma sequência que seja de Cauchy.
8. Calcule, se houver, o limite das seguintes sequências:
   (a) $x_n = -5$
   (b) $x_n = \frac{\cos x}{x}$
   (c) $x_n = \frac{-n}{1000}$
   (d) $x_n = (-1)^n + 5$
   (e) $x_n = \dfrac{2(-1)^n}{n}$
   (f) $x_n = q^n$, $0 < q < 1$
   (g) $x_n = \sqrt[n]{2}$.
   (h) $x_n = \sqrt[n]{n}$.
   (i) $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$