

Conjuntos finitos e infinitos, enumeráveis e não enumeráveis

Fátima(Febf-UERJ)

Definição 1 (conjunto finito, conjunto infinito) *Seja $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Um conjunto X diz-se finito quando é vazio ou quando existe uma bijeção $f : I_n \rightarrow X$, para algum $n \in \mathbf{N}$. Neste caso dizemos que X possui n elementos, ou que o número cardinal do conjunto X é n . Um conjunto é dito infinito quando não é finito.*

Exercícios

1. Enuncie a definição de *função injetiva (ou injetora)*. Dê exemplo de uma função que seja injetiva e de uma função que não seja injetiva.
2. Enuncie a definição de *função sobrejetiva (ou sobrejetora)*. Dê exemplo de uma função que seja sobrejetiva e de uma função que não seja sobrejetiva.
3. Enuncie a definição de *função bijetiva (ou bijetora)*. Dê exemplo de uma função que seja sobrejetiva e de uma função que não seja sobrejetiva.
4. Considere o conjunto das vogais. Prove que o mesmo é finito e determine seu número cardinal.

Exercícios:

1. Verdadeiro ou falso? Justifique.
 - (a) Se existe uma bijeção $f : X \rightarrow Y$ então dados $a \in X$ e $b \in Y$, existe também uma bijeção tal que $g(a) = b$?
 - (b) Todo subconjunto de um conjunto finito é finito?
 - (c) Dada $f : X \rightarrow Y$, se Y é finito e f é injetiva então X é finito?

- (d) Dada $f : X \rightarrow Y$, se Y é finito e f é sobrejetiva então X é finito?
- (e) Dada $f : X \rightarrow Y$, se X é finito e f é sobrejetiva então Y é finito?
- (f) Dada $f : X \rightarrow Y$, se X é finito e f é injetiva então Y é finito?
- (g) A interseção de dois conjuntos finitos é finito?
- (h) A união de dois conjuntos finitos é finito?
- (i) Seja A_n um conjunto finito e k um número natural. $X = \cup_{n=1}^k A_n$ é finito?
- (j) Seja A_n um conjunto finito. $X = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ é finito?
- (k) Se X é um conjunto infinito, então existe uma aplicação injetiva $f : \mathbf{N} \rightarrow X$?
- (l) Um conjunto é finito se e somente se é limitado.
- (m) Um conjunto $X \subset \mathbf{N}$ é finito se e somente se é limitado.

Definição 2 (conjunto enumerável) *Um conjunto X é enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbf{N} \rightarrow X$, neste último caso, X possui a mesma cardinalidade de \mathbf{N} .*

Um conjunto é dito não enumerável quando não é enumerável.

Teorema 1 *Todo subconjunto $X \subset \mathbf{N}$ é enumerável.*

Teorema 2 *Seja $f : X \rightarrow Y$ injetiva. Se Y é enumerável então X também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Teorema 3 *Seja $f : X \rightarrow Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável então Y também é.*

Teorema 4 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ é enumerável.

Sugestão para a demonstração: Considerar a aplicação $\psi(m, n) = 2^m 3^n$.

Teorema 5 *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Teorema 6 *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Exercícios

1. O conjunto dos naturais pares é enumerável?
2. O conjunto dos naturais ímpares é enumerável?
3. \mathbf{Z} é enumerável?
4. \mathbf{Q}^+ é enumerável?
5. \mathbf{Q} é enumerável?
6. Exiba um número irracional x tal que $0,005 < x < 0,006$
7. \mathbf{R} é enumerável?
8. O conjunto $\{0, x_1x_2x_3\dots\}$, onde $x_i = 0$ ou $x_i = 1$ é não enumerável?
9. O conjunto dos números irracionais é enumerável?
10. Verdadeiro ou falso? Justifique.
 - (a) Se A e B são enumeráveis então $A \cup B$ é enumerável?
 - (b) Se A e B são enumeráveis então $A \times B$ é enumerável?
 - (c) Se $A \subset X$ e X é enumerável então A é enumerável?