Derivadas de Funções trigonométricas e de suas "inversas".

Fátima(Febf-UERJ)

1. Usando que $\lim_{h\to 0} \dfrac{\text{sen } h}{h} = 1$ e $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos h}{h} = 0$, prove que:
   (a) $(\text{sen } x)' = \cos x$
   (b) $(\cos x)' = -\text{sen } x$

2. Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \text{sen } x \end{array}$$

   e sua inversa:

$$\begin{array}{rccc} g: & [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \mapsto & \text{arcsen } x \end{array}$$

   Clique aqui para ver os gráficos de fe g.

   Calcule $g'(x), -1 < x < 1$**.**

   Dicas:

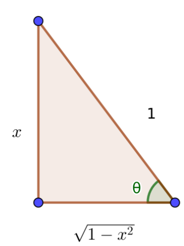

Figura 1: Visualização do cosseno de $teta$, sabendo-se que o seno de θ é x

- Se g é a inversa de f então $f(g(x)) = x$. Derive ambos os membros da igualdade.
- Observe que se $\theta = \text{arcsen}(x)$, então $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$.(Ver figura 1) Note que o cosseno é sempre positivo quando o ângulo θ varia entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Resposta:

$$(\text{arcsen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi] & \rightarrow & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$$

e sua inversa:

$$\begin{array}{rccc} g: & [-1,1] & \rightarrow & [0,\pi] \\ & x & \mapsto & \arccos(x) \end{array}$$

Gráficos de f e g)

Calcule $g'(x), -1 < x < 1$. Dica: Você pode repetir algo parecido com o processo anterior, ou ainda, observar que se $arccos(x) = \frac{\pi}{2} - arcsen(x)$ (ver figura 2). Neste último caso, basta derivar ambos os membros da igualdade para resolver o problema.

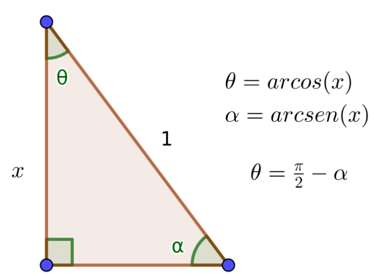

Figura 2: Ilustração de que $arccos(x) = \frac{\pi}{2} - arcsen(x)$

Resposta:

$$(\text{arcos}(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4. Seja $f(x) = tg(x),\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Calcule $f'(x)$ nos pontos onde a função for derivável.

   Resposta: $f'(x) = sec^2(x)$, onde $sec(x) = \frac{1}{\cos x}$

5. Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f: &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow & \Re \\ & x & \mapsto & \mathrm{tg}(x) \end{array}$$

   e sua inversa:

$$\begin{array}{rccc} g: & \Re & \rightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & x & \mapsto & \mathrm{arctg}(x) \end{array}$$

   Veja os gráficos de $f(x)$e $g(x)$.

   Calcule $g'(x),\ \ x \in \Re$**.**

   Resposta: $(arctg(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

6. Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f: &]0, \pi[& \rightarrow & \Re \\ & x & \mapsto & \mathrm{cotg}\ x \end{array}$$

   e sua inversa:

$$\begin{array}{rccc} g: & \Re & \rightarrow &]0, \pi[\\ & x & \mapsto & \mathrm{arccotg}\ x \end{array}$$

   Veja os gráficos de $f(x)$e $g(x)$.

   Calcule $g'(x),\ \ x \in \Re$**.** Dica: Observe que $\mathrm{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x)$

   Resposta: $(\mathrm{arccotg}(x))' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

7. Seja $f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Calcule $f'(x)$.

   Resposta: $f'(x) = \sec(x)\mathrm{tg}(x)$

8. Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \{0 \leq x \leq \pi, x \in \Re, x \neq \frac{\pi}{2}\} & \rightarrow & \{|x| \geq 1, x \in \Re\} \\ & x & \mapsto & \sec(x) \end{array}$$

e sua inversa:

$$\begin{array}{rccc} g: & \{|x| \geq 1, x \in \Re\} & \rightarrow & \{0 \leq x \leq \pi, x \in \Re, x \neq \frac{\pi}{2}\} \\ & x & \mapsto & \operatorname{arcsec}(x) \end{array}$$

Clique aqui para ver o gráfico de $f(x) = \sec(x)$ e $g(x) = \operatorname{arcsec}(x)$

Calcule $g'(x)$.