Polinômio de Taylor

Fátima(Febf-UERJ)

O polinômio de Taylor g de ordem n de uma função f numa vizinhança de um ponto p é aquele que melhor aproxima f numa vizinhança de p. Podemos verificar que

$$f(p) = g(p), \quad f'(p) = g'(p), \quad f"(p) = g"(p), \quad f'''(p) = g'''(p), \ldots, f^{[n]} = g^{[n]}$$

Verifique que a expressão para o polinômio de Taylor de ordem 2,para uma função f, em torno de um ponto p é:

$$g(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f"(p)}{2}(x-p)^2$$

Exercícios:

1. Encontre o polinômio de Taylor de ordem 2 da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ em torno de um ponto p. Encontre os pontos críticos de f e veja como fica o polinômio de Taylor nestes pontos. Plote o gráfico de f no Geogebra, asssim como o gráfico do polinômio de Taylor correspondente para cada ponto crítico.

   Comandos no Geogebra:

   - Crie o controle deslizante p.
   - Digite na janela de álgebra: $f(x) = x^3 - 3x + 1$
   - Crie o controle deslizante k. Deixe que ele varie de 1 até 20, com passo 1. Deixe-o no valor 2.
   - Digite na janela de álgebra:PolinômioDeTaylor(f,p ,k)
   - Digite na janela de álgebra: Resolver(Derivada(f)=0)
   - Esboce o polinômio de Taylor em torno dos pontos que anulam a primeira derivada de f

2. Encontre, no Geogebra, o polinômio de taylor de ordem 4 da função $f(x) = e^x$ em torno de $p = 1$. Varie o ponto p e a ordem k do polinômio.

3. Faça um exercício análogo ao anterior para as funções $g(x) = \cos(x)$ e $g(x) = \text{sen(x)}$.

4. (Regra de L'Hospital] Suponha que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Suponha também f e g deriváveis em a, com $g'(a) \neq 0$. Prove que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

5. Calcule os seguintes limites:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}h}{h}, \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h},$$

Teorema 1. *Se $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é k vezes diferenciável em $a \in I$ então para todo $h \in \mathbf{R}$ tal que $a + h \in I$ tem-se:*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f''(a)}{3!}h^3 \ldots + \frac{f^{[n]}(a)}{n!}h^n + r(h),$$

onde $lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h^n} = 0$. Além disso

$$p(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{[k]}(a)}{k!}h^k$$

é o único polinômio de grau menor ou igual a n tal que

$$f(a+h) = p(h) + r(h), \ \ com \ \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0$$

$p(h)$ descrito acima é o polinômio de Taylor de ordem n para f em torno de a.