Polinômio de Taylor

Maria de Fátima de Paiva Almeida

Introdução

A ideia subjacente aos polinômios de Taylor é aproximar funções por polinômios na vizinhança de um ponto p do domínio da função. Chamando uma função com derivadas de todas as ordens de f e o polinômio de g, o polinômio de Taylor de ordem $n = 4$, deve cumprir as seguintes condições:

- $f(p) = g(p)$
- $f'(p) = g'(p)$
- $f''(p) = g''(p)$
- $f'''(p) = g'''(p)$
- $f''''(p) = g''''(p)$

Para o polinômio de ordem n as derivadas de ordem k de f e d g, devem coincidir no ponto p, onde k é um inteiro maior ou igual a zero e menor ou igual a n

A título de ilustração, calcularemos uma fórmula para o polinômio de Taylor$g$ de ordem 4 da função em f, em torno de p . Para facilitar os cálculos, é conveniente escrevermos g no seguinte formato:

$$g(x) = a_0 + a_1(x-p) + a_2(x-p)^2 + a_3(x-p)^3 + a_4(x-p)^4$$

Nossa tarefa é descobrir os coeficientes: a_0, a_1, a_2,a_3, a_4, tal que:

$$f(p) = g(p), f'(p) = g'(p), f''(p) = g''(p), f'''(p) = g'''(p), f''''(p) = g''''(p)$$

Fazendo as contas descobriremos que:

$$g(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + f''(p)\frac{(x-p)^2}{2!} + f'''(p)\frac{(x-p)^3}{3!} + f''''(p)\frac{(x-p)^4}{4!}$$

O polinômio de Taylor de ordem n é análogo.

Atividade no Geogebra

1. Crie o controle deslizante p, com incremento 0.5, variando no intervalo de -5 até 5.

2. Crie o controle deslizante n, com incremento 1, variando no intervalo de 1 até 30.

3. Digite na janela de álgebra: $f(x) = e^x$.

4. Digite na janela de álgebra: PolinômioDeTaylor(f,p,n). Anote o polinômio de Taylor de ordem 4 dado pelo Geogebra em torno de p=0. Fazendo n tender ao infinito, obtemos a série de Taylor da função exponencial.

5. Digite na janela de álgebra: $f(x) = cos(x)$. Anote o polinômio de Taylor de ordem 8 dado pelo Geogebra em torno de p=0. Fazendo n tender ao infinito, obtemos a série de Taylor da função cosseno.

6. Digite na janela de álgebra: $f(x) = sen(x)$. Anote o polinômio de Taylor de ordem 8 dado pelo Geogebra em torno de p=0. Fazendo n tender ao infinito, obtemos a série de Taylor da função seno.

7. Calcule a série de Taylor de $f(x) = e^{ix}$.

8. Deduza que $e^{ix} = cos(x) + isen(x)$