Estudo de concavidades. Ponto de Inflexão. Gráficos

Fátima(Febf-UERJ), Jeferson(UFRJ) & Lúcia(ENCE)

Resultado 1 (Teste da primeira derivada) *Seja f uma função contínua num intervalo (a, b), contendo um um ponto crítico c de f. Se existir um número real δ tal que:*

- *Se $f'(x) > 0$, $\forall x \in]c - \delta, c[$ e $f'(x) < 0$, $\forall x \in]c, c + \delta[$, então c é ponto de máximo local para f.*
- *Se $f'(x) < 0$, $\forall x \in]c - \delta, c[$ e $f'(x) > 0$, $\forall x \in]c, c + \delta[$, então c é ponto de mínimo local para f.*

Definição 1 (Concavidade) *Seja $f : D \subset \Re \to \Re$ uma função derivável em $]a, b[\subset D$*

- *Dizemos que o gráfico de f é côncavo para cima em $]a, b[$, se o gráfico de f está sempre acima da reta tangente em $(c, f(c))$, $\forall c \in]a, b[$.*
- *Dizemos que o gráfico de f é côncavo para baixo em $]a, b[$, se o gráfico de f está sempre abaixo da reta tangente em $(c, f(c))$, $\forall c \in]a, b[$.*

Resultado 2 (Concavidade) *Seja $f : D \subset \Re \to \Re$ uma função duas vezes derivável em $]a, b[\subset D$*

- *Se $f''(x) > 0, \forall x \in]a, b[$, então o gráfico de f côncavo para cima em $]a, b[$.*
- *Se $f''(x) < 0, \forall x \in]a, b[$, então o gráfico de f é côncavo para baixo em $]a, b[$.*

Definição 2 (Ponto de inflexão) *Seja f contínua em c. Dizemos que c é ponto de inflexão de f se o gráfico de f muda de concavidade em c.*

1. Esboce o gráfico das funções abaixo, identificando, caso haja, máximos locais, mínimos locais,máximos globais, mínimos globais, assíntotas e ponto de inflexão. Identifique os intervalos de crescimento e decrescimento da função e faça o estudo das concavidades.

   (a) $f(x) = x^3 - 3x + 4,\ x \in \Re$

   (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1,\ x \in \Re$

   (c) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x,\ x \in \Re$

   (d) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x},\ x \in \Re, x \neq 0$

   (e) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-2},\ x \in \Re, x \neq 2$

   (f) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}\ x \in \Re, x \neq \pm 3$

   (g) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in \Re$