EDO's Exatas. Método do fator integrante.

Professora: Fátima

Considere a EDO:

$$Pdx + Qdy = 0 \tag{1}$$

onde P e Q são funções de x e y.

Se acontecer de existir $u(x, y)$ tal que:

- $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$
- $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

Então: $u(x, y) = c$ é solução de (1). Neste caso, dizemos que a equação (1) é **exata**.

De fato, supondo que y é função de x, temos:

$$\begin{array}{lcll} u(x,y) & = & c & \Leftrightarrow \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} & = & 0 & \Leftrightarrow \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy & = & 0 & \Leftrightarrow \\ Pdx + Qdy & = & 0 & \end{array}$$

Se as derivadas parciais até segunda ordem de u existirem e forem contínuas, as derivadas cruzadas devem coincidir, ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Assim, para verificar se a equação é exata, verificar se

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Em caso positivo, a equação (1) será exata.

Exercício: Verifique se a EDO:

$$(3x^2y^2 + 3x^2)dx + (2x^3y + \cos y)dy = 0 \tag{2}$$

é exata.

Solução: Neste caso, temos:

- $P = (3x^2y^2 + 3x^2) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$
- $Q = (2x^3y + \cos y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

A equação é exata pois:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + 3x^2) \\ &= 6x^2y \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^3y + \cos y) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned}$$

Para recuperarmos $u(x, y)$, podemos integrar $P = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ em relação a x e $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$ em relação a y e em seguida compatibilizarmos os resultados.

Exercício: Resolva implicitamente a EDO (2)

Por um lado:

$$u(x, y) = \int (3x^2y^2 + 3x^2)dx = x^3y^2 + x^3 + g(y)$$

Por outro lado:

$$u(x, y) = \int (2x^3y + \cos y)dy = x^3y^2 + \text{sen}y + h(x)$$

Para compatibilizar a resposta, podemos tomar $g(y) = \text{sen}y$ e $h(x) = x^3$. Assim, a menos de uma constante aditiva, $u(x, y) = x^3y^2 + x^3 + \text{sen}y$. Portanto, sendo c uma constante, a solução geral da EDO, dada implicitamente, é:

$$x^3y^2 + x^3 + \text{sen}y = c$$

Para conferirmos, podemos derivar ambos os membros da igualdade em relação a x, lembrando que no primeiro membro, y é uma função de x.

Conferindo:

$$
\begin{aligned}
x^3y^2 + x^3 + \text{sen}y &= c \Leftrightarrow \\
3x^2y^2 + 2yx^3\frac{dy}{dx} + 3x^2 + \cos y\frac{dy}{dx} &= 0 \Leftrightarrow \\
(3x^2y^2)dx + (2yx^3)dy + (3x^2)dx + (\cos y)dy &= 0 \Leftrightarrow \\
(3x^2y^2 + 3x^2)dx + (2yx^3 + \cos y)dy &= 0
\end{aligned}
$$

Outra opção para resolvermos uma EDO como (2) é após encontrarmos

$$u(x,y) = \int (3x^2y^2 + 3x^2)dx = x^3y^2 + x^3 + g(y),$$

observarmos que:

$$u(x,y) = R + g(y), \tag{3}$$

onde, neste exemplo, $R = x^3y^2 + x^3$.

Como desejamos obter u tal que $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q$, segue-se que

$$\frac{\partial R}{\partial y} + g'(y) = Q,$$

ou seja:

$$g'(y) = Q - \frac{\partial R}{\partial y}$$

Para obtermos $g(y)$ basta integrarmos a expressão do membro direito em relação a y e substituirmos o resultado encontrado em 3.

Assim, resolvendo a EDO (2) com esta estratégia, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= Q \Rightarrow \\
\frac{\partial}{\partial y}(x^3y^2 + x^3 + g(y)) &= 2x^3y + \cos y \Rightarrow \\
2x^3y + g'(y) &= 2x^3y + \cos y \Rightarrow \\
g'(y) &= \cos y \Rightarrow \\
g(y) &= \text{sen}y + k
\end{aligned}
$$

Assim, considerando $k = 0$, podemos tomar:

$$u(x,y) = x^3y^2 + x^3 + \text{sen}y$$

A solução implícita geral da EDO (2), será, como esperávamos:

$$x^3y^2 + x^3 + \text{sen}y = c,$$

que já verificamos estar correta.

Em alguns casos em que a equação não é exata, existe uma técnica para encontrar uma equação equivalente que seja exata. Vamos trabalhar duas situações:

- Equação tornada exata com fator integrante F(x)
- Equação tornada exata com fator integrante F(y)

Exemplo de equação tornada exata a partir de um fator integrante

Considere a EDO:

$$Mdx + Ndy = 0 \tag{4}$$

onde M e N são funções de x e y. Suponha que a EDO não seja exata, ou seja, que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

Buscaremos um fator integrante F de modo que a equação fique exata.

Assim:

$$(FM)dx + (FN)dy = 0, \tag{5}$$

onde F seja tal que :

$$\frac{\partial (FM)}{\partial y} = \frac{\partial (FN)}{\partial x}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (FM)}{\partial y} &= \frac{\partial (FN)}{\partial x} \Rightarrow \\
\frac{\partial F}{\partial y}M + F\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial x}N + F\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \\
\frac{\partial F}{\partial y}M - \frac{\partial F}{\partial x}N &= F\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

Caso F=F(x) Neste caso $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ e a equação fica:

$$-\frac{dF}{dx}N = F\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

Assim:

$$\begin{aligned}
-\frac{dF}{dx}N &= F\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \Rightarrow \\
\frac{dF}{F} &= \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx \Rightarrow \\
ln|F(x)| &= \int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx
\end{aligned}$$

No caso de

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

ser uma função apenas de x, podemos utilizar como fator integrante:

$$F(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) dx}$$

Neste caso, usando este fator integrante, caímos numa equação equivalente que é exata, e usamos o procedimento anterior para chegarmos à solução.

1. Resolva implicitamente a EDO $(x^2 - y^2)dx + (2xy)dy = 0$

2. Para o caso de utilizarmos o fator integrante como uma função $F(y)$, conclua, mantendo a notação utilizada anteriormente, que podemos utilizar o fator integrante:

$$F(y) = e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy}$$

3. Resolva implicitamente a EDO $(y^2)dx + (xy - 2)dy = 0$