Introdução à derivada

Fátima(Febf-UERJ), Jeferson(UFRJ) & Lúcia(ENCE)

O conceito de derivada é muito usado em problemas de máximo e mínimo, taxas relacionadas e elaboração de gráficos de funções. O assunto foi desenvolvido inicialmente no século XVII, agregando contribuições de Newton e Leibniz, entre outros. A derivada de uma função em um ponto, quando não nula, indica o quanto esta função está crescendo ou decrescendo na vizinhança do ponto. Se a derivada existir, ela será o coeficiente angular da reta que melhor aproxima o gráfico da função. Tal reta é tangente ao gráfico da função no ponto correspondente. Se $f(x)$ indicar a posição de uma partícula no tempo x, a derivada de f em um ponto a indicará a velocidade instantânea da partícula em a.

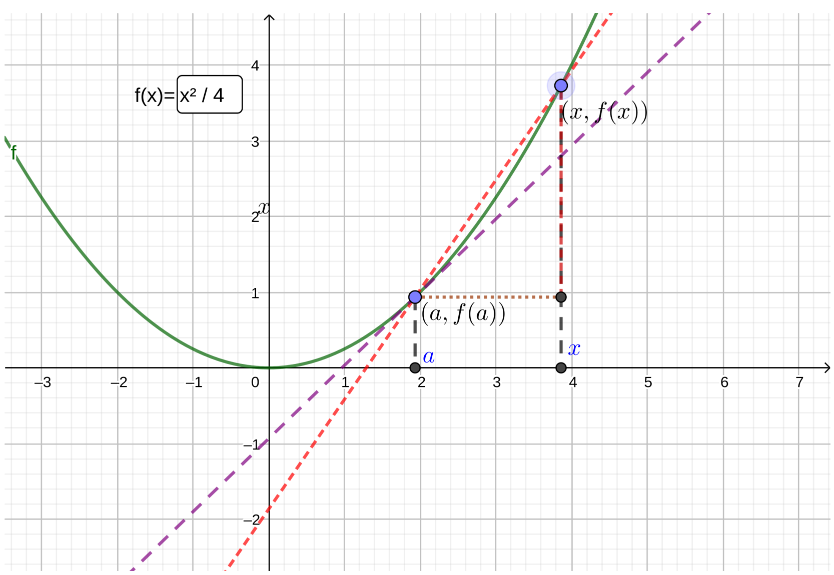

Figura 1: Derivada de uma função em um ponto

Veja o aplicativo

Podemos calcular o coeficiente angular de retas secantes ao gráfico que passam pelo ponto $(a, f(a)$. A reta que passa pelos pontos $(a, f(a)$ e $(x, f(x))$ terá coeficiente angular: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Se o limite abaixo existir, a derivada de f no ponto a, é dada por:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Se chamarmos a varíavel $h = x - a$, a expressão acima pode ser escrita como:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Considerarmos $y = f(x)$, na notação de Leibniz denotamos:

- $\Delta y = f(x) - f(a)$.
- $\Delta x = x - a$.

Assim, o coeficiente angular de uma reta secante é dado por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

No limite quando $x \to a$, na notação de Leibniz, podemos escrever:

$$f'(a) = \frac{dy}{dx}(a)$$

Outras notações para derivada de f, no ponto a:

$$\frac{df}{dx}(a), \quad \frac{d}{dx} f\,(a), \quad D_x f(a)$$

Podemos associar a uma função f derivável, uma função f', onde $f'(x)$ é a derivada da função f no ponto x.

Exercícios:

1. Encontre a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$, no ponto $(1, f(1))$.

2. Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 5$.

(b) $f(x) = c$, onde c é uma constante real.

(c) $f(x) = 4x$

(d) $f(x) = ax$, com a constante real.

(e) $f(x) = x^2$.

(f) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

(g) $f(x) = \sqrt{x}, x > 0$

(h) $f(x) = x^3$

(i) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

(j) $f(x) = \text{sen} x$

(k) $f(x) = \cos x$