Cálculo I(FEBF-UERJ)-2024-1.
Primeira Lista

Autores:
Fátima(Febf-UERJ),Lúcia(ENCE),Jeferson(UFRJ), Maurício(Febf-UERJ)

1. Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \in \Re, x \geq 2 \\ x+2, \text{ se } x \in \Re, x < 2 \end{cases}$$

   (a) Esboce seu gráfico.

   (b) Calcule, caso haja, $\lim_{x \to 2} f(x)$. Calcule, caso haja, $f(2)$.

   (c) Calcule, caso haja, $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

   (d) Calcule, caso haja, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

2. (i-sorteio) Determine k de modo que exista o limite de $f(x)$ quando x tende a 2, onde:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \in \Re, x \geq 2 \\ x+k, \text{ se } x \in \Re, x < 2 \end{cases}$$

3. Determine k e c de modo que a função f seja contínua. Lembre que para uma função ser contínua ela precisa ser contínua em todos os pontos de seu domínio.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se} x \in \Re, x > -2 \\ x+k, \text{se } x \in \Re, x < -2 \\ c, \text{se } x = -2 \end{cases}$$

4. Considere a função:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \ x \in \Re, \ x \neq 0$$

(a) Esboce seu gráfico.

(b) Determine $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Embora usemos a notação "lim"para indicar o comportamento da função, só consideramos que o limite lateral existe, no sentido estrito do termo, quando a resposta é um número real.

(c) Determine $\lim_{x \to 0^-} f(x)$. Embora usemos a notação "lim"para indicar o comportamento da função, só consideramos que o limite lateral existe, no sentido estrito do termo, quando a resposta é um número real.

(d) Determine $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

(e) Determine $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(f) Determine as assíntotas horizontais, assim como as assíntotas verticais, caso haja.

5. (ii-sorteio) Considere a função:

$$f(x) = \frac{1}{x} + 3,\ x \in \Re,\ x \neq 0$$

(a) Esboce seu gráfico.

(b) Determine $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(c) Determine $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

(d) Determine $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

(e) Determine $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(f) Determine as assíntotas horizontais, assim como as assíntotas verticais, caso haja.

6. Considere a função:

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + 3,\ x \in \Re,\ x \neq 2$$

(a) Esboce seu gráfico.

(b) Determine $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

(c) Determine $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

(d) Determine $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

(e) Determine $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(f) Determine as assíntotas horizontais, assim como as assíntotas verticais, caso haja.

7. Considere a função:

$$f(x) = \left| \frac{1}{x} \right|, \ x \in \Re, x \neq 0$$

(a) Esboce seu gráfico.

(b) Determine $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

(c) Determine $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.

(d) Determine $\lim_{x \to 0} f(x)$.

8. Considere a função:

$$f(x) = \left| \frac{1}{x-2} + 3 \right|, \ x \in \Re, x \neq 2$$

(a) Esboce seu gráfico.

(b) Determine $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

(c) Determine $\lim_{x \to 2^-} f(x)$.

(d) Determine $\lim_{x \to 2} f(x)$.

(e) Determine $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

(f) Determine $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

(g) Determine as assíntotas horizontais, assim como as assíntotas verticais, caso haja.

9. Se $f(x) = x^5$ e $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^3+1}, x \neq -1$, então $\lim_{x \to 0} f(g(x)) =$

(a) -2

(b) -1

(c) 0

(d) 1

(e) 2

10. Encontre a equação da reta:

    (a) que passa por $(2, -3)$ e tem coeficiente angular -4;

    (b) que passa por $(-4, 2)$ e $(3, 1)$;

    (c) que passa por $(2, -4)$ e paralela ao eixo x;

    (d) que passa por $(1, 6)$ e paralela ao eixo y;

    (e) que passa por $(4, -2)$ e paralela a $x + 3y = 7$;

    (f) que passa por $(5, 3)$ e perpendicular a $y + 7 = 2x$;

    (g) (iii-sorteio) que passa por $(-4, 3)$ e paralela à reta determinada por $(-2, -2)$ e $(1, 0)$;

    (h) que passa por $(-2, 3)$ e tem inclinação de 135^o;

    (i) que passa por $(1, 3)$ e forma um ngulo de $\pi/6$ com o eixo positivo dos x.

11. Simplifique $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$, onde $f(x)$ dada por:

    (a) $f(x) = 3x - 8$;

    (b) $f(x) = -x^2 + 5$;

    (c) (iv- sorteio) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

12. Calcule os seguintes limites:

    (a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ R: -2

    (b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ R: 12

    (c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ R: 19

(d) $\lim_{x\to y} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$ R: ny^{n-1}

(e) $\lim_{y\to x} \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$ R: nx^{n-1}

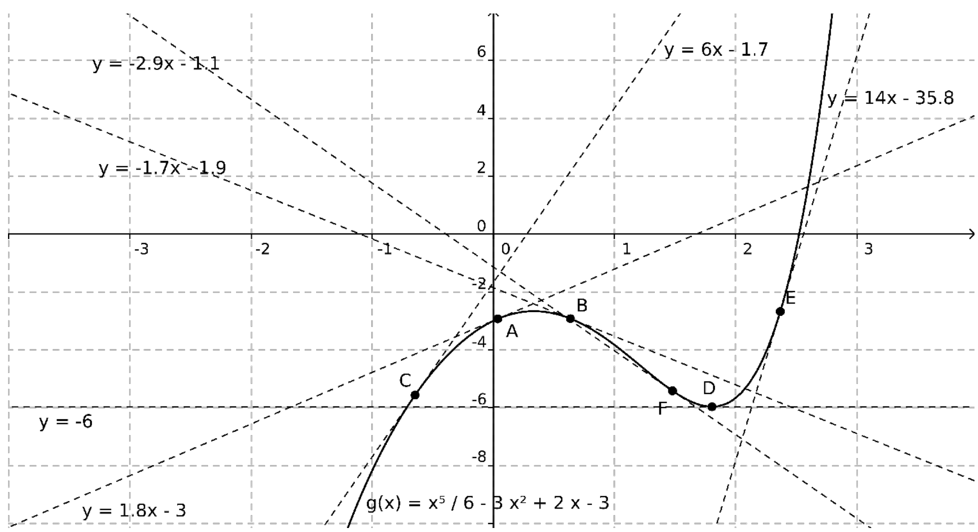
(f) $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}$ R: $\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}$

(g) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}$ R: $\frac{1}{2}$

(h) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$ R: 0

(i) (v-sorteio) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$ R: $\frac{1}{2}$

13. Considere os pontos $A = (a, g(a))$, $B = (b, g(b))$, $C = (c, g(c))$, $D = (d, g(d))$, $E = (e, g(e))$, $F = (f, g(f))$, sendo o gráfico de g expresso na figura. Pede-se:



(a) Colocar a, b, c, d, e, f em ordem crescente.

(b) Colocar $g(a), g(b), g(c), g(d), g(e), g(f)$ em ordem crescente.

(c) Colocar $g'(a), g'(b), g'(c), g'(d), g'(e), g'(f)$ em ordem crescente.

14. Determine α e β de modo que a função

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x < 1, \\ x^3 + x, & x \geq 1, \end{cases}$$

seja derivável no ponto $x = 1$. Esboce o gráfico de f, considerando α e β encontrados.

15. Encontre as equações das retas que passam pelo ponto $(3, -2)$ e que são tangente à curva $y = x^2 - 7$. Interprete geometricamente. **Resposta**: $y = 2x - 8$, $y = 10x - 32$. Clique aqui para ver o gráfico

16. Determine a equação da reta que é perpendicular á reta $2y + x = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$. Interprete geometricamente. **Resposta**:$y = 2x - 25/4$ Clique aqui para ver o gráfico

17. Considere a função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.

    (a) Determine os pontos de máximo local e mínimo local, caso haja. Justifique.

    (b) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função. Justifique.

    (c) Faça o estudo das concavidades, identificando os intervalos onde a concavidade está voltada para baixo e onde a concavidade está voltada para cima. Justifique.

    (d) Esboce o gráfico da função.

    (e) Determine o polinômio de Taylor de segunda ordem da função, que passa no ponto(1,f(1)). Esboce o gráfico dele no mesmo plano cartesiano onde você esboçou o gráfico da função.

18. Esboce o gráfico, encontre os pontos de máximos e mínimos locais, caso existam. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de cada função. Determine ainda, caso haja, pontos de inflexão e faça o estudo de concavidades:

    (a) (vi- sorteio) $g(x) = x^3 - 12x - 5$

    (b) (vii-sorteio) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

    (c) (viii -sorteio)$h(x) = \frac{2}{x^2}$

19. Calcule $f'(x)$. Esboce e compare os gráficos de f e f' a fim de verificar se sua resposta é coerente. (Livro do James Stewart, Cálculo, vol1, quarta edição, pag 189)

    (a) $f(x) = x^2$
    (b) $f(x) = x^3$
    (c) (ix-sorteio) $f(x) = 2x^2 - x^4$
    (d) $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 50x$
    (e) $f(x) = x + \frac{1}{x}$
    (f) $f(x) = x - 3x^{1/3}$
    (g) $f(x) = x^2 + 2e^x$

20. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

    (a) $f(x) = cos(x^3 - 2x + 1)$
    (b) $f(x) = (cos(x))(x^3 - 2x + 1)$
    (c) $f(x) = \dfrac{cos(x) + sen(x)}{e^{x^2+1}}$
    (d) $f(x) = \ln(x^4 + 3)$

21. Calcule as derivadas das seguintes funções:

    a) $f(x) = \sqrt[5]{\operatorname{sen}^3(5x^2 + x)}$,
    b) $g(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^4(x^3) + 2x}{\operatorname{sen}^2(1 + x^2)}$.
    c) (x-sorteio) $f(x) = \frac{e^{-x}}{e^x+1}$,
    d) $g(x) = ln(x^4)(\cos(x^3 + 2x + 1))$.

22. De todos os retângulos inscritos numa dada circunferência, mostre que o quadrado tem maior área.

23. Mostre que, entre todos os retângulos de mesma área, o que tem menor perímetro é o quadrado.

24. Determine a área do retângulo máximo, com base no eixo x e vértices superiores sobre a parábola $y = 12 - x^2$. **Resposta**: 32.

25. Determine os pontos da curva $xy = 1$ mais próximos da origem. **Resposta**: $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

26. Encontre o ponto da curva $y = 2/x$, $x > 0$, que está mais próximo da origem.

27. Seja $f(x) = ax^2+bx+c, a \neq 0$. Prove que f atinge um extremo relativo em $x_v = \frac{-b}{2a}$.

28. Uma reta passando por $(1, 2)$ corta o eixo x em $A = (a, 0)$ e o eixo y em $B = (0, b)$. Determine a área do triângulo $\triangle AOB$ de área mínima (a e b positivos).
Resp.: 4.

29. A agência do correio de uma certa cidade não aceita pacote se a some da altura com o perímetro da base da caixa esceder $60\,cm$
a) Encontre a caixa retangular de base quadrada de maior volume que satisfaz a esta exigência.
b) Ache a caixa cilíndrica de maior volume que satisfaz a esta exigência.
Resp.: a) $10 \times 10 \times 20\,cm^3$; b) $r = 20/\pi\,cm$, $h = 20\,cm$.

30. Deseja-se construir uma caixa de forma cilíndrica, de $1\,m^3$ de volume. Nas laterais e no fundo será utilizado material que custa $R\$\,10,00$ o metro quadrado e na tampa material de $R\$\,20,00$ o metro quadrado. Determine as dimensões da caixa que minimiza o custo do material empregado.
Resp.: $r = \sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}}\,cm$, $h = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}\,cm$.

31. Um cartaz deve conter $50\,cm^2$ de matéria impressa com duas margens de $4\,cm$ em cima e embaixo e duas margens laterais de $2\,cm$ cada. Determine as dimensões externas do cartaz de modo que sua área total seja mínima.
Resp.: $9\,cm$, $18\,cm$.

32. Deve-se construir um campo de esportes com a forma de um retângulo mais uma área semi-circular em cada extremidade. O perímetro do campo deve ser uma pista de $440\,m$. Determine as dimensões do campo de modo que a área da parte retangular seja a maior possível.
Resp.: Lados: $110\,m$, raio semi-circular: $\frac{110}{\pi}\,m$.

33. Ache a menor distância do ponto $P = (2, 0)$ a um ponto sobre a curva $y^2 - x^2 = 1$.
Resp.: $\sqrt{3}$.

34. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ por derivação implícita, onde $y = y(x)$ está definida pela equação
$$y \text{ sen}(\frac{1}{y}) = 1 - xy.$$

35. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ por derivação implícita, onde $y = y(x)$ está definida pela equação $x^2 + y^2 = 1$, com $y > 0$.

36. Uma pedra é jogada de uma altura de $160\,m$. Um foco de luz está localizado no mesmo nível, a $10\,m$ da posição inicial da pedra. A altura da pedra após t segundos será de $A(t) = -16t^2 + 160$ metros. Com que velocidade a sombra da pedra se moverá sobre o chão 1 segundo após a pedra ser jogada?

37. Uma pedra lançada numa lagoa provoca uma série de ondulações concêntricas. Se o raio r da onda exterior cresce uniformemente à taxa de $1,8\,m/s$, determine a taxa com que a área perturbada está crescendo: (a) quando $r = 3$; (b) quando $r = 6$.
Resp.: a) $10,8\pi\, m/s$; b) $21,6\pi\, m/s$.

38. Um funil cônico tem diâmetro de $30\,cm$ na parte superior e altura de $40\,cm$. Se o funil é alimentado à taxa de $1,5\,l/s$ e tem uma vazão de $800\,cm^3/s$, determine quão rapidamente está subindo o nível da água quando esse nível é de $25\,cm$.
Resp.: $1792/225\pi\, cm/s$.

39. Um carro indo em direção norte, a $40\,km/h$, e um caminhão indo em direção leste a $30\,km/h$, deixam um cruzamento ao mesmo tempo. Qual é a taxa de variação da distância entre eles 3 horas depois?
Resp.: $50\,km/h$.

40. Uma jovem com $1,60\,m$ de altura está correndo a uma velocidade de $3,6\,m/s$ e passa debaixo de uma lâmpada em um poste, situada $6\,m$ acima do solo. Encontrar a velocidade com que o comprimento da

sombra da jovem aumenta.
Resp.: $1,3\,m/s$.

41. Uma lâmpada está no solo a $15\,m$ de um edifício. Um homem de $1,80\,m$ de altura anda a partir da luz em direção ao edifício a $1,2\,m/s$. Ache a taxa de variação do comprimento de sua sombra quando: (a) ele estiver a $12\,m$ do edifício; (b) ele estiver a $9\,m$ do edifício.
Resp.: a) $-3,6\,m/s$; b) $-0,9\,m/s$.

42. Um avião está voando com velocidade constante a uma altitude de $3\,km$ sobre uma linha reta que irá passar diretamente acima de um observador no chão. Num dado instante, o observador nota que o ângulo de elevação do avião é de $\pi/3\,rad$ e está aumentando a uma taxa de $1/60\,rad/s$. Ache a velocidade do avião.
Resp.: $-200/3\,m/s$.

43. Um menino mantém uma pipa empinada a uma altura de $300\,m$ e o vento a afasta do menino, horizontalmente, à razão de $25\,m/s$. Com que velocidade deve o menino dar linha quando a pipa estiver a $500\,m$ dele?
Resp.: $20\,m/s$.

44. Um bote está sendo puxado para o cais por meio de uma corda com uma extremidade amarrada ao bote e a outra passando por uma polia simples localizada na beira do cais a $1,5\,m$ acima do nível do bote. Se se puxa a corda a $0,5\,m/s$, com que velocidade o bote se aproxima do cais no instante em que há ainda $3\,m$ de corda para fora?
Resp.: $-0,577\,m/s$.

45. Um tanque com a forma de um cone invertido está sendo esvaziado a uma taxa de $6\,m^3/min$. A altura do cone é de $24\,m$ e o raio da base é de $12\,m$. Achar a velocidade com que o nível de água está abaixando, quando a água tiver profundidade de $10\,m$.
Resp.: $-6/25\pi\,m/s$.