

Limites envolvendo infinito. Assíntotas.

Fátima(Febf-UERJ)

1 Limites envolvendo infinito. Assíntotas.

Definição 1 (Limites "infinitos"($+\infty$)) *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do domínio X da função. Dizemos que $f(x)$ tende a infinito quando x tende a a , e denotamos*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty,$$

quando para todo número $M > 0$, existe algum intervalo aberto centrado em a , tal que com a possível exceção da imagem de a , a imagem de todos os demais pontos de X deste último intervalo é maior que M . Mais precisamente, quando dado um número real $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta, x \in X \Rightarrow f(x) > M$$

Clique aqui para ver o aplicativo

Definição 2 (Limites "infinitos"($-\infty$)) *De maneira análoga definimos*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$$

quando para todo número $M > 0$, existe algum intervalo aberto centrado em a , tal que com a possível exceção da imagem de a , a imagem de todos os demais pontos de X deste último intervalo assume valores negativos, cujos módulos são superiores ao de M .

Definição 3 (Assíntotas verticais) *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $c \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação do domínio X da função. Quando alguma das situações abaixo acontece, a reta $x = c$ é uma assíntota vertical do gráfico da função f :*

- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty$

Definição 4 (Limites "no infinito" ($+\infty$)) Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $f(x)$ tende ao número real c quando x tende ao infinito, e denotamos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c,$$

quando dado um intervalo aberto V em torno de c , existe um número real M tal que a imagem de todo ponto do domínio que seja maior que M , pertencerá a V .

Analogamente, definimos o limite quando x tende a "menos infinito".

Definição 5 (Assíntotas horizontais) Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que a reta $y = c$ é uma assíntota horizontal do gráfico de f quando alguma das duas situações abaixo acontece:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c$

Clique aqui para aplicativo de assíntotas

Exercícios

1. Considere a função:

$$f(x) = \left| \frac{1}{x+1} - 2 \right|, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq -1$$

- (a) Esboce seu gráfico.
- (b) Determine $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
- (c) Determine $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$.
- (d) Determine $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

(e) Determine $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

(f) Determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. Identifique, caso haja, assíntotas horizontais e verticais nos gráficos abaixo. Justifique suas respostas.

