Cálculo I(FEBF-UERJ)-2024-1

Fátima(Febf-UERJ)

Assuntos: Revisão de funções. Introdução intuitiva ao conceito de limite

1. Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x + 2}, x \in \Re, x \neq -2 \\ 5, \text{se } x = -2 \end{cases}$$

   (a) Esboce seu gráfico. Dica: Observe que o número -2 anula o numerador e o denominador.

   (b) Calcule, caso haja, $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$. Calcule, caso haja, $f(-2)$.

   (c) Calcule, caso haja, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Calcule, caso haja, $f(0)$.

   (d) Qual é a diferença do gráfico desta função para o gráfico da função $g(x) = x^2 - 1,\ x \in \Re$?

2. Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1,\ \text{se} x \in \Re, x > -2 \\ x + 1, \text{se } x \in \Re, x < -2 \\ 5, \text{se } x = -2 \end{cases}$$

   (a) Esboce seu gráfico.

   (b) Calcule, caso haja, $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$. Calcule, caso haja, $f(-2)$.

   (c) Calcule, caso haja, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Calcule, caso haja,$f(0)$.

   (d) Calcule, caso haja, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$.

   (e) Calcule, caso haja, $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$.

3. Determine k e c de modo que a função f seja contínua. Lembre que para uma função ser contínua ela precisa ser contínua em todos os pontos de seu domínio. Esboce o gráfico de f após determinar estes valores.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + k, \ \text{se} x \in \Re, x > -2 \\ x + 1, \text{se } x \in \Re, x < -2 \\ c, \text{se } x = -2 \end{cases}$$

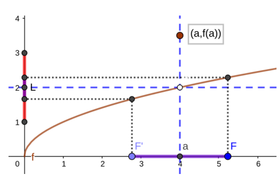
Definição 1 (Ponto de acumulação) *Seja $X \subset \mathbf{R}$. Dizemos que $a \in \mathbf{R}$ é ponto de acumulação de X se para todo intervalo aberto contendo a, existe algum elemento de X que seja diferente do próprio a.*

Definição 2 (Limite) *Seja $f : X \subset \Re \rightarrow \Re$ e seja $a \in \mathbf{R}$ um ponto de acumulação do domínio X da função. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual ao número real L, e denotamos*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

quando dado um intervalo aberto centrado em L existe algum intervalo aberto centrado em a, tal que com a possível exceção da imagem de a, a imagem de todos os demais pontos deste último intervalo está contida no intervalo inicial. Mais precisamente, quando dado um número real $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$



Propriedades de Limites

1. O limite, se existir, é único.

$$\text{Se } \lim_{x \to a} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \to a} f(x) = L_2, \text{ então } L_1 = L_2$$

2. $\lim_{x \to a} c = c$, onde c é uma constante.

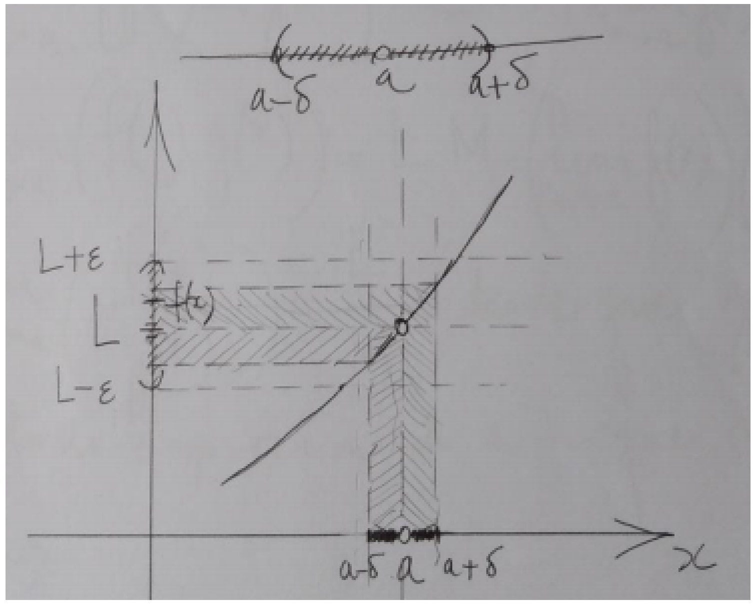


Figura 1: $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (fonte: Professor Jeferson)

3. $\lim_{x \to a} x = a$
4. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, com L e M números reais, então:
   (a) $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = L + M$
   (b) $\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = L - M$
   (c) $\lim_{x \to a}(f(x)g(x)) = LM$
   (d) $\lim_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{L}{M}$, desde que $g(x) \neq 0$ perto de a e $M \neq 0$

Exercícios

1. Calcule os seguintes limites. Se não for possível, justifique.
   (a) $\lim_{x \to 3} 7$
   (b) $\lim_{x \to 8} x$
   (c) $\lim_{x \to -1} (2x - 1)$
   (d) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(e) $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$

(f) $\lim_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$

(g) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

(h) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

(i) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1 + h)^3 - 1}{h}$

Resultado 1 (Teorema do Confronto(ou do Sanduíche)) *Sejam f, g e h funções tais que:*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

e que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

Então:

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Exemplo:
Calcule,caso exista:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Clique aqui para acessar o aplicativo