Introdução à integral dupla.

A integração dupla estende o conceito de integral de Riemman (usado para integrar funções $f : D \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$) para o cálculo de integrais de funções $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Entre as principais aplicações estão o cálculo de áreas e volumes.

Clique aqui para ver aplicativo de integral simples

Clique aqui para ver o aplicativo de integral dupla

As integrais duplas normalmente aparecem em um dos seguintes formatos:

$$\int_c^d \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx = \int_{x=c}^{x=d} \left[\int_{y=g(x)}^{y=h(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

ou

$$\int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dxdy = \int_{y=c}^{y=d} \left[\int_{x=g(y)}^{x=h(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

Para calcular

$$\int_c^d \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$$

primeiro integramos $f(x,y)$ em relação a y e mantemos x fixo. Os limites de integração $g(x)$ e $h(x)$ dependem de um valor fixo de x, e assim resulta a quantidade

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

Então integramos a quantidade posterior em relação a x (agora considerando x como variável entre os limites de integração c e d. O outro caso segue de maneira análoga.

Exemplos

1. Considere a região $R = [-1,1] \times [0,2]$ e $f(x,y) = x^2 y$. Esboce a região R e calcule
$$\int \int_D f(x,y)dxdy$$

2. Calcule
$$\int \int_R y\text{sen}(xy)dxdy,$$
onde $R = [1,2] \times [0,\pi]$. Desenhe o retângulo R.

3. Calcule
$$\int\int_D x dx dy,$$
onde D é a região compreendida entre as curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$. Esboce a região D.

4. Calcule o valor da integral
$$\int_0^4 \int_0^{\frac{3x}{2}} \sqrt{16 - x^2} dy dx$$