Primeira Lista de Cálculo IV
Professora Fátima

1. Esboce a curva de nível 1 de $f(x,y) = x^2 + y$
2. (i-sorteio) Esboce a curva de nível 6 da função $f(x,y) = y - x^2 + 5x$
3. (ii-sorteio)Determine em cada ponto o gradiente da função:
$$f(x,y) = x^5y^2 - 4x\text{sen}y + 4y\cos x$$
4. (iii-sorteio)Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4y + 4$ no ponto (3,1,f(3,1)).
5. (iv- sorteio) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função definida por $f(x,y) = x^2 + y^2$, em $x = 1$, $y = 1$.
6. Encontre a equação do plano tangente ao gráfico da função definida por $f(x,y) = xe^{xy}$, em $x = 1$, $y = 0$.
7. Determine e classifique os pontos críticos de cada função.
   (a) (v-sorteio) $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$
   (b) (vi-sorteio) $f(x,y) = xy^2 + x^3y - xy$
   (c) (vii-sorteio) $f(x,y) = x^2y + 3xy - 3x^2 - 4x + 2y$
   (d) (viii-sorteio) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 5$
   (e) (ix-sorteio) $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$
   (f) (x-sorteio)$f(x,y) = xy - x^3 - y^2$.
8. (xi-sorteio) Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com $12m^2$ de papelão. Determine o volume máximo de tal caixa.
9. Uma caixa retangular tem um volume igual a 20 metros cúbicos. O material usado nos lados custa 1 real por metro quadrado, o material usado no fundo e no tampo custa 2 reais por metro quadrado. Pede-se:
   (a) Dê exemplo de 3 caixas atendendo o enunciado do problema, mas que possuam preços diferentes. Identifique cada caixa através das dimensões de seus lados.

   (b) Quais as dimensões da caixa mais barata?
   (c) Qual o preço da caixa mais barata?

10. O potencial eletrostático em uma região do espaço é dado por $V(x, y, z) = ln(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Pede-se:
    (a) Qual o valor do potencial eletrostático no ponto (0,5,12)?
    (b) A partir do ponto (0,5,12) deseja-se ir para pontos de maior potencial. Indique através de um vetor, a direção e o sentido a seguir momentaneamente, de modo a otimizar este aumento.
    (c) Determine um vetor normal a superfície equipotencial que passa por (0,5,12).

11. (xii-sorteio) Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2+2y^2$ na circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

12. Encontre a distância mínima da origem à hipérbole de equação $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$.

13. Uma placa metálica circular com 1 metro de raio está colocada com seu centro na origem do plano xy e é aquecida de modo que a temperatura no ponto xy é dada por $T(x, y) = 64(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 3)$ graus, onde x e y estão em metros. Encontre a maior e a menor temperatura da placa.

14. (xiii-sorteio) Uma caixa retangular tem um volume de 20 metros cúbicos. O material usado nos lados custa 1 real por metro quadrado, o material usado no fundo custa 2 reais por metro quadrado e o na parte superior 3 reais por metro quadrado. Quais as dimensões da caixa mais barata?

15. O potencial elétrico V em um ponto (x, y) na região $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ é dado por $V(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$. Encontre os potenciais máximo e mínimo nesta região.

16. Encontre os extremos de $f(x, y) = x^2+y^2$ restrito ao domínio $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$

17. O custo do exame de taxas de uma certa organização depende do número x e y em cada uma das centrais de acordo com a fórmula $C(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 100$. Quantos exames devem ser feitos em

cada central a fim de minimizar os custos se o número total de exames precisa ser 16.

18. Considere a região $R = [-1,1] \times [0,2]$ e $f(x,y) = x^2y$. Esboce a região R e calcule
$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

19. Calcule
$$\int\int_R y\text{sen}(xy)dxdy,$$
onde $R = [1,2] \times [0,\pi]$. Desenhe o retângulo R.

20. Calcule
$$\int\int_D xdxdy,$$
onde D é a região compreendida entre as curvas $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$. Esboce a região D.

21. Calcule
$$\int\int_D (x+2y)dxdy,$$
onde D é a região do plano entre as parábolas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$. Esboce a região D.

22. Determine o volume da região do sólido que está debaixo do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e acima da região D do plano xy limitada pela reta $y = 2x$ e pela parábola $y = x^2$. Esboce a região D.

23. Seja D o triângulo com vértices (-1,0),(0,1) e (1,0). Calcule
$$\int\int_D (x+y)dxdy$$

24. Calcule as integrais, para as regiões D indicadas:
    (a) $\int\int_R xy\ dxdy$, onde $R = [1,2] \times [1,2]$. **Resposta**:$\frac{9}{4}$
    (b) $\int\int_R \cos(x{+}3y)\ dxdy$, onde $R = [-\frac{pi}{2}, +\frac{pi}{2}]\times[-\frac{pi}{2}, +\frac{pi}{2}]$. **Resposta**:$-\frac{4}{3}$
    (c) $\int\int_D y^2 sen(x^2)dxdy$, D limitada por $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = -x^{\frac{1}{3}}$ e $x = 8$.
    (d) $\int\int_D cos(y^3)dxdy$, D limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e $x = 0$.

(e) $\int\int_D y^{-2} e^{\frac{x}{\sqrt{y}}} dxdy$, onde D é o quadrado $[0,1] \times [1,2]$.

25. Calcule cada uma das integrais:

    (a) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (2x+2y) dydx$

    (b) (xiv-sorteio) $\int_0^1 \int_0^1 xy^2 dydx$

    (c) (xv-sorteio) $\int_0^4 \int_0^y 3\sqrt{y^2+9} dxdy$

    (d) $\int_1^2 \int_{y^2}^{y^3} dxdy$

    (e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} ydydx$

    (f) $\int_1^{e^3} \int_0^{\frac{1}{x}} e^{xy} dydx$

    (g) $\int_1^3 \int_0^{\ln y} ye^x dxdy$

    (h) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} ydxdy$

    (i) $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{xy^3} 18x^3y^2 z dzdydx$

    (j) $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} xdzdxdy$

26. Calcule o volume do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x+y+z=1$.

27. Calcule
$$\int\int_D (x^2+y^2)^2 dxdy$$
onde D é a região dada por $x^2+y^2 \leq 4$, com $x \geq 0$. Esboce a região.

28. Calcule
$$\int\int_D (3x+4y^2) dxdy,$$
onde D é a região do semi-plano superior limitada pelos círculos $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$. Esboce a região D.

29. Calcule o volume do sólido W acima do plano xy limitado pelo parabolóide $z=x^2+y^2$ e pelo cilindro $x^2+y^2=2y$.

30. Calcule $\int\int_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dxdy$, onde D é a região limitada por $x+y=1$, $x=0$ e $y=0$.

31. Determine de cada campo F abaixo é ou não conservativo. Em caso positivo determine sua função potencial, isto é , a função f tal que $\nabla f = F$

    (a) $F(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (x - 2)\mathbf{j}$

    (b) $F(x, y) = (3 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}$

32. Enuncie o Teorema de Green.

33. Determine a área delimitada pela elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

    Sugestão: Use o teorema de Green.

34. Prove que se $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ é um campo conservativo, então $rot\mathbf{F} = 0$

35. Prove que se $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial sobre $\mathbf{R}^3$ e P, Q e R têm derivadas parciais de segunda ordem contínuas , então $div(rotF) = 0$

36. Determine o plano tangente à superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ no ponto (1,1,3).

37. Determine a área da uma esfera de raio R.

38. Determine a área do pedaço de parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano z=9.

39. Calcule a integral de superfície $\int\int_S x^2 dS$, onde S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

40. Calcule $\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $F(x, y, z) = (y, x, z)$ e S é a fronteira da região sólida E contida pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$ e pelo plano $z = 0$.

41. Enuncie o Teorema de Stokes.

42. Determine o fluxo do campo vetorial $F(x, y, z) = (x, z, y)$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

43. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ onde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ Oriente C para ter o sentido anti-horário quando olhado de cima.

44. Use o teorema de Stokes para calcular a integral

$$\int\int_S rot\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

onde $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ e S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy.

45. Enuncie o Teorema da divergência (Teorema de Gauss).

46. Calcule

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

onde $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy)\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2})\mathbf{j} + (\operatorname{sen}(xy))\mathbf{k}$ e S é a superfície E limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$.