Problemas de Máximos e Mínimos

Definição 1 (Máximo absoluto) *Seja $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Dizemos que f possui um máximo absoluto em $p \in D$ se $f(p) \geq f(q), \forall q \in D$.*

Definição 2 (Mínimo absoluto) *Seja $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Dizemos que f possui um mínimo absoluto em $p \in D$ se $f(p) \leq f(q), \forall q \in D$.*

Resultado 1 *Seja $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ onde D é fechado (contém todos os pontos de sua fronteira) e limitado. Então f possui ponto de máximo absoluto e ponto de mínimo absoluto em D.*

Exercício: Uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo tem um volume de 20 metros cúbicos. O material usado nos lados custa 1 real por metro quadrado, o material usado no fundo custa 2 reais por metro quadrado e o na parte superior 3 reais por metro quadrado. Quais as dimensões da caixa mais barata?

Resultado 2 (Método dos Multiplicadores de Lagrange) *Sejam*

$$f, g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},$$

com derivadas parciais contínuas e seja

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \textit{tal que } g(x, y) = c\}.$$

Se em $p \in D \subset \mathbf{R}^2$ ocorre um máximo ou mínimo relativo de f, então

$$\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$$

Observação:
O mesmo resultado vale para $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, com restrição $g(x, y, z) = c$

Exercícios:

1. Encontre os extremos de $f(x, y) = x^2+y^2$ restrito ao domínio $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$
2. O custo do exame de taxas de uma certa organização depende do número x e y em cada uma das centrais de acordo com a fórmula $C(x, y) = 2x^2 + xy + y^2 + 100$. Quantos exames devem ser feitos em cada central a fim de minimizar os custos se o número total de exames precisa ser 16. Clique aqui para ver a interpretação geométrica