Máximos e Mínimos Relativos no Geogebra

Professora Fátima

Observação: Procure salvar periodicamente seu trabalho.

Link para arquivo no Geogebra

1. Considere a função $f(x,y) = 12xy - 4x^2y - 3xy^2$ e esboce seu gráfico no Geogebra.

   (a) Coloque um ponto sobre o gráfico de f e chame-o de P. No campo de entrada digite $p1 = x(P)$. Tecle enter. Digite: $p2 = y(P)$.Tecle enter.

   (b) Calcule $\nabla f(p)$. Na verdade, vamos usar o "formato matricial"correspondente ao gradiente calculado em p, o qual chamaremos de Dfp. Para isso, digite:

   $$\begin{aligned} f_x &= Derivada(f,x) \\ f_y &= Derivada(f,y) \\ Dfp &= \{\{f_x(p1,p2), f_y(p1,p2)\}\} \end{aligned}$$

   Para não ficar com os gráficos das coordenadas do gradiente desenhados, esconda-os.

   (c) Crie o vetor $\begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix}$. Para isso, digite no campo de entrada: $V = \{\{x - p1\}, \{y - p2\}\}$.

   (d) Para obter o plano tangente, digite: inicialmente $N = Dfp\ \ V$. Em seguida:

   $$h(x,y) = f(p1,p2) + N(1,1),$$

   onde $N(1,1)$ extrai o conteúdo expresso na matriz N. Repare que o que aparece no membro direito são as duas primeiras parcelas da fórmula de Taylor para a função real de duas variáveis.

   (e) Calcule hessiana

   $$\mathcal{H}_f(p) = \begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix}$$

. Para isso digite:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= Derivada(f_x, x)\\
f_{xy}(x,y) &= Derivada(f_x, y)\\
f_{yx}(x,y) &= Derivada(f_y, x)\\
f_{yy}(x,y) &= Derivada(f_y, y)\\
Hfp &= \{\{f_{xx}(p1,p2), f_{xy}(p1,p2)\}, \{f_{yx}(p1,p2), f_{yy}(p1,p2)\}\}
\end{aligned}
$$

(f) Calcule o polinômio de Taylor de segunda ordem em torno de p, lembrando que:

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= f(p) + Df(p)\begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \end{pmatrix}\\
&+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-p_1 & y-p_2 \end{pmatrix}\mathcal{H}_f(p)\begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Observe que $f(p) = g(p)$, $\nabla f(p) = \nabla g(p)$ e $\mathcal{H}_f(p) = \mathcal{H}_g(p)$.

A aproximação de segunda ordem é frequentemente uma quádrica. Para visualizar no Geogebra, defina no campo de entrada: V_t=MatrizTransposta(V). Nesta notação, não esqueça de usar o "underline"antes de colocar o "t", pois o computador travou quando esquecemos deste underline. Depois digite inicialmente:

$$M = (Dfp)(V) + \frac{1}{2}(V_t)(Hfp)(V)$$

Isto dará uma matriz com uma linha e uma coluna. M(1,1) apresentará o conteúdo da expressão. Assim:

$$g(x,y) = f(p1,p2) + M(1,1)$$

Agora mova o ponto P sobre o gráfico de f. O que você observa?

(g) Que tal estudarmos o comportamento nos pontos críticos? Para identificá-los, precisamos descobrir que valores (x,y) anulam o gradiente de f. Na janela CAS digite:

Resolver $(\{f_x(x,y) = 0, f_y(x,y) = 0\}, \{x,y\})$.

Após identificar os pontos críticos, faça as duas primeiras coordenadas de P coincidir com um deles. Observe a aproximação pelo plano (primeira ordem) e pela quádrica (segunda ordem).

(h) Em seguida estudaremos a classificação dos pontos críticos. Pela fórmula de Taylor, considerando-se a aproximação de segunda ordem suficientemente boa, observações aritméticas nos levam a tirar conclusões diretas quando a matriz hessiana em um ponto p que anula o gradiente é uma matriz diagonal, com todos os elementos da diagonal principal não nulos. Observamos que só sobram a primeira e a terceira parcelas da fórmula de Taylor de segunda ordem.

Se os elementos da diagonal forem ambos positivos, teremos um ponto de mínimo local em p, pois os pontos suficientemente próximos a p terão por imagem a adição de $f(p)$ com um número positivo, o que resultará num valor superior ao de $f(p)$.

Analogamente, se ambos os elementos da diagonal forem negativos, em p ocorrerá uma máximo local, pois os pontos suficientemente próximos terão como imagem um valor inferior ao de $f(p)$.

Quando a hessiana não for uma matriz diagonal, podemos diagonalizá-la, pois ela será sempre uma matriz simétrica para funções bem comportadas. Neste caso existirão autovalores reais λ_1 e λ_2, que serão os elementos da matriz diagonal D, e matrizes ortogonais S e S^t tais que $\mathcal{H}_f(p) = SDS^t$, onde $S^t = S^{-1}$, é a transposta de S, que neste caso coincide com a a inversa de S, pelo fato de S ser ortogonal.Para obter S basta colocar em suas colunas autovetores linearmente independentes de S, de comprimento 1. Lembramos que devido a simetria de S estes autovetores serão ortogonais. Lembramos ainda que a matriz S é a matriz mudança de base de β para ϵ, onde β é base de autovetores e ϵ é a base canônica, e sua inversa S^{-1}, é a matriz mudança da base ϵ para a base β.

$$\begin{aligned} g(x,y) &= f(p) + Df(p)\begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-p_1 & y-p_2 \end{pmatrix} SDS^t \begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Chamando

$$u = S^t \begin{pmatrix} x-p_1 \\ y-p_2 \end{pmatrix},$$

vem que:

$$u^t = \begin{pmatrix} x-p_1 & y-p_2 \end{pmatrix} S,$$

de modo que teremos:

$$g(x, y) = f(p1, p2) + \frac{1}{2}u^t Du,$$

e com uma análise como a anterior, veremos que a classificação dos pontos críticos se relaciona com o sinal dos autovalores. Felizmente, como o determinante e o traço são invariantes por mudança de base, observamos que se os autovalores tiverem o mesmo sinal o determinante da hessiana será positivo, se tiverem sinais contrários, ele será negativo.

(i) Seja Q um ponto crítico de f. Assim $\nabla f(Q) = 0$.

Para ocorrer máximo relativo em Q, os autovalores de $\mathcal{H}_f(Q)$ devem ser ambos negativos. Assim devemos ter $det(\mathcal{H}_f(Q)) > 0$ e $tr(\mathcal{H}_f(Q)) < 0$.

Para ocorrer mínimo relativo em Q, os autovalores de $\mathcal{H}_f(Q)$ devem ser ambos positivos. Assim devemos ter $det(\mathcal{H}_f(Q)) > 0$ e $tr(\mathcal{H}_f(Q)) > 0$.

Para ocorrer ponto de sela em Q, os autovalores de $\mathcal{H}_f(Q)$ devem ter sinais contrários. Assim devemos ter $det(\mathcal{H}_f(Q)) < 0$.

Calcule o determinante e o traço de $\mathcal{H}_f(Q)$, para cada um dos pontos críticos. Atribua a P as coordenadas de Q.

(j) Varie as funções f trabalhadas.