Regras para o escalonamento. Matriz na forma escada. Curiosidades.
Professora Fátima

Dizemos que um par ordenado $(p_1, p_2)$ é uma solução do sistema

$$\begin{cases} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{cases}$$

Quando os valores de $p_1$ e $p_2$ satisfazem as duas equações.

Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se, toda solução de qualquer um dos sistemas também for solução do outro.

Podemos executar operações sobre as linhas de um sistema, de modo a obtermos um sistema equivalente a ele. Em geral, buscamos um sistema equivalente mais simples, com solução imediata. Tais operações podem ser efetivadas por meio de operações nas linhas da matriz ampliada. Destacamos as seguintes operações elementares:

| sistema | matriz ampliada associada |
|---|---|
| • Permutar duas equações | Permutar duas linhas |
| • Multiplicar uma equação por $k \neq 0$ | Multiplicar uma linha por $k \neq 0$ |
| • Substituir uma equação pela soma dela com um múltiplo de outra | Substituir uma linha pela soma dela com um múltiplo de outra |

Um dos métodos de solucionar o sistema é encontrar a matriz linha equivalente reduzida à forma escada.

**Definição 1 (Forma escada)** *Uma matriz $m \times n$ se encontra linha reduzida à forma escada se:*

• *O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é 1 e os outros elementos da coluna deste "1"são nulos.*

• *Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.*

• *Considerando-se as linhas não nulas, o primeiro elemento não nulo de cada linha ocorre em alguma coluna anterior a do primeiro elemento não nulo da linha seguinte, caso exista algum. Esta condição dá a forma escada à matriz.*

1. Decida se cada uma das matrizes está ou não na forma escada. Caso não esteja, justifique.

   (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

(g)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(h)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. No exercício anterior, para as matrizes que não estiverem na forma escada, encontre uma matriz linha-equivalente na forma escada.

3. Considerando as matrizes do item anterior como matrizes ampliadas de sistemas lineares, qual seria a solução de cada um dos sistemas? Se não houver solução, justifique.

   **Definição 2 (Posto)** *O posto de uma matriz é o número de linhas não nulas de sua matriz linha equivalente na forma escada.*