

**BIBLIOTECA  
BS/CFM**

# Meu Professor de Matemática

e outras histórias

Elon Lages Lima

## Prefácio

Este livro é uma coleção de pequenos ensaios sobre Matemática Elementar. Em sua maioria, eles foram publicados na Revista do Professor de Matemática mas alguns são inéditos. Os professores Euclides Rosa e Zoroastro Azambuja Filho gentilmente concordaram em contribuir com dois artigos cada um, pelos quais agradeço sensibilizado.

Ao publicá-lo, gostaria que ele fosse útil aos professores de Matemática e (talvez indiretamente) aos seus alunos. Espero também que alguns dos tópicos nele abordados sirvam para estudos em grupo e seminários para estudantes universitários, especialmente aqueles que visam o magistério.

Respeitosamente, dedico este livro à memória do meu antigo mestre Benedito de Moraes.

Rio de Janeiro, dezembro de 1991.  
Elon Lages Lima

CFM  
510  
L732m

aceio J279 54

ED 00000 6229

tipo de Aquisição	Deacab
Adquirido de	PG.M.M.
Num. Aquisição	2310.510
Preço	
registro	0.334.080-1
Data registro	31.5.001

Capa: Rodolfo Capeto

Diagramação e composição:  
GRAFTEX Comunicação Visual  
Tel. 274.9944, Rio de Janeiro.



# Conteúdo

<b>Meu Professor de Matemática</b>	<b>1</b>
<b>A Equação do Terceiro Grau</b>	<b>11</b>
<b>Sobre a Evolução de Algumas Idéias Matemáticas</b>	<b>27</b>
<b>Malba Tahan e as Escravas de Olhos Azuis</b>	<b>43</b>
<b>Mania de Pitágoras</b>	<b>51</b>
<b>Como Abrir um Túnel de Você Sabe Geometria</b>	<b>59</b>
<b>O Teorema de Euler Sobre Poliedros</b>	<b>67</b>
<b>Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros Convexos</b>	<b>85</b>
<b>Ainda Sobre o Teorema de Euler Para Poliedros Convexos</b>	<b>91</b>
<b>Como Calcular a área de um Polígono se Você Sabe Contar</b>	<b>101</b>
<b>Fazendo Médias</b>	<b>115</b>
<b>Grandezas Proporcionais</b>	<b>125</b>
<b>Comentário Sobre um Livro</b>	<b>143</b>
<b>Conceitos e Controvérsias</b>	<b>149</b>
Zero é um número natural?	150
Por que $(-1)(-1) = 1$ ?	151
Por que $(-1)(-1) = 1$ ? (continuação)	153
Qual o valor de $0^0$ ?	155
Qual a diferença entre círculo e circunferência?	156
Que significa a igualdade $1/9 = 0,111\dots$ ?	158
Dúvidas sobre dízimas	162
Voltando a falar sobre dízimas	164
$2 + 3\sqrt{-1}$ ou $3 + 2\sqrt{-1}$ : Qual destes números é o maior?	171
O número $e$ : por que?	173
Quais são as raízes da equação $2^x = x^2$ ?	176
Números negativos têm logaritmo?	180
Paradoxo?	188
De onde vêm os nomes das funções trigonométricas?	187
Quantas faces tem um poliedro?	189
Sobre um problema da olimpíada	190
Novamente $0^0$	194
Deve-se usar máquina calculadora na escola?	199
O que é o número $\pi$ ?	202

**N**uma tarde amena, de férias em Maceió, eu conversava com um conhecido, na calçada da Rua do Comércio, quando ele passou pelo lado oposto. A rua era estreita e o movimento muito pequeno. Sem deter-se, perguntou de lá: "O número é 27 ou 729?" Respondi-lhe: "Vinte e sete!" Ele: "Ah, sim, claro. Obrigado!". A pessoa que estava comigo achou estranho alguém confundir dois números tão diferentes. Expliquei-lhe então que 27 era parte do endereço de uma livraria, que eu dera antes àquele homem. E que, sendo 27 o cubo de 3, enquanto 729 é o cubo de 9, é natural confundir um desses números com o outro, pois 3 e seu quadrado 9 são números muito parecidos, principalmente para quem ensina todos os anos, a várias turmas, os critérios de divisibilidade.

Pequenos episódios como esse ocorrem freqüentemente à minha lembrança quando recordo o professor Benedito e a influência enorme que ele teve na formação de sucessivas gerações de estudantes. Essa influência transcendia a sala de aula e se prolongava por toda uma vida, modesta, porém extremamente íntegra, coerente e com propósito bem definido.

No breve relato que se segue, procurei esboçar o essencial de sua personalidade e da mensagem que ele transmitiu, com grande fidelidade, durante décadas. E sugerir quanto me sinto privilegiado por ter cruzado sua trajetória.

# Meu Professor de Matemática

Chamava-se Benedito de Moraes.

Era alto, robusto, bondoso e muito enérgico. Tinha faces rosadas, cabelos prateados e fumava um cachimbo. Carregava uma pasta de couro mole, cheia de folhas que continham as infalíveis listas de exercícios, copiadas a carbono na sua letra redonda, firme e regular. Sua voz, alta e característica, e a maneira de falar sublinhando as palavras, refletiam, como tudo nele, simplicidade, clareza e convicção.

Não me consta que tenha sido ou desejado ser outra coisa senão professor de Matemática. Ensinava no Instituto de Educação (um colégio estadual, só para meninas), no Colégio Batista (onde fiz o ginásio) e em sua casa, a turmas para escolas militares, engenharia e concursos para o Banco do Brasil. Certa vez, um governador do Estado, conhecido por suas arbitrariedades, convidou-o, para Secretário de Educação. Recusou assim: "Simples questão de Aritmética. No Estado ganho  $x$ , no Batista  $y$  e em casa  $z$ . Aceitando sua oferta, mantenho  $x$ , perco  $y$  e  $z$ , e ganho  $w$ . Pode até ser que  $x + y + z < x + w$ . Mas o senhor gosta de mandar e eu não gosto de ser mandado. Mais cedo ou mais tarde, terei de escolher entre fazer o que não quero ou perder  $w$ . Aí ficarei só com  $x$ . Prefiro continuar como estou, com  $x + y + z$ ."

Foi meu professor no segundo, terceiro e quarto ano do ginásio e, dois anos depois, numa turma particular, em sua casa. Mas, desde os dez anos, ouvia muito falar dele, das coisas que ensinava às minhas irmãs e que depois viria a ensinar a mim. Elas eram alunas dedicadas. A mais velha dava aulas em casa a grupos de colegas de classe e a outra costumava estudar em voz alta as demonstrações dos teoremas de Geometria. Eu, mesmo sem querer, escutava muitas dessas coisas. Um ou dois anos depois, quando no colégio os assuntos novos me eram apresentados, vários deles me soavam bastante familiares; agora era apenas a ocasião de conhecê-los melhor.

Mais tarde, tive que sair para estudar fora, mas sempre que passava as férias em Maceió, ia visitá-lo. Lembro-me bem, seguia o costume nordestino de pôr cadeiras na calçada para conversar, noite afora, sob o

agradável que seu cachimbo exalava.

Não sei onde estudou nem como aprendeu Matemática. É quase certo que nunca freqüentou universidade. Andou pelo Rio de Janeiro, onde serviu ao Exército e começou a torcer pelo Fluminense. Já era professor havia muitos anos quando vim a conhecê-lo. Na realidade, era um patrimônio cultural da cidade, respeitado e permanente. Assim como a estátua equestre do Marechal Deodoro, na praça do Teatro. Por isso foi um choque saber, anos mais tarde, que falecera. Para mim, ele ia continuar sempre. Em que pesem os bons alunos que teve, alguns dos quais tentaram segui-lo, sem ele Maceió deixou de ser, para o jovem que deseja (ou precisa) aprender Matemática, o lugar privilegiado que era no meu tempo. Ficou como era antes dele. Como as outras cidades.

A vida me fez conhecer depois outros lugares, países e pessoas. Alguns desses lugares eram maravilhosos e as pessoas extraordinárias. Com eles, foi-me dada a oportunidade de *aprender* muitas coisas. Mas o Professor Benedito foi quem melhor soube me *ensinar*.

Suas aulas eram bem humoradas e cheias de entusiasmo pela Matemática. Eram também claras, bem organizadas, objetivas e eficientes. Sempre conseguia dar todo o programa oficial do ano. Explicava com bastante cuidado os pontos mais difíceis e requeria dos alunos apenas o que lhes ensinava. Assim, cumpria seu dever da melhor maneira possível. Em troca, não abria mão do direito de exigir que os alunos cumprissem o deles. Nunca fez concessões à fraqueza ou ao despreparo de suas classes. Em cada turma havia sempre alguns que aprendiam quase tudo. Os outros tinham que lutar bravamente para sobreviver e trabalhavam duro porque sabiam que o esforço honesto era a única saída viável.

Quanto a mim, suas aulas eram as que melhor se adaptavam ao meu modo de enfrentar a escola, que era o seguinte: prestar o máximo de atenção às aulas para depois não ter que estudar em casa. Isto funcionava maravilhosamente com o professor Benedito. As listas de exercícios eu fazia no recreio. E tudo o que ele pedia nas provas estava contido nas aulas que dera e que eu gravara na memória. Além de tudo, eu ainda ganhava de graça uma profissão.

Com efeito, tendo o acaso me deixado um dia, aos dezoito anos, numa cidade estranha, sem dinheiro e sem emprego, não me preocupei muito pois estava certo de que saberia ensinar a Matemática. Bastava fazer como o Professor Benedito. Foi o que fiz e acho que deu certo.

A Matemática ensinada por Benedito de Moraes não era apenas um conjunto de regras e receitas válidas por decreto (o que ele chamava de método “ou crê ou morre”) nem tampouco um sistema dedutivo formal, vazio de significado. Era qualquer coisa bem próxima da realidade e das aplicações, porém organizada com definições, exemplos e demonstrações. Algumas dessas definições apelavam abertamente para a experiência intuitiva e certas de suas demonstrações também lançavam mão de argumentos não contidos nos axiomas. Isto escandalizaria um purista lógico, mas tinha o grande mérito de assentar a Matemática em bases concretas, próximas da realidade. Devo deixar claro que suas eventuais transgressões ao rigor não continham nada fundamentalmente errado: nunca subtraiu desigualdades do mesmo sentido, nunca dividiu por zero e jamais considerou raiz quadrada real de um número negativo. Simplesmente não fazia cavalo de batalha em torno de certos fatos óbvios e verdadeiros que qualquer aluno de ginásio estaria disposto a aceitar sem discutir. Por exemplo: se o ponto  $A$  está no interior e o ponto  $B$  está no exterior de uma circunferência, então ele concluía que o segmento  $AB$  tem exatamente um ponto em comum com essa circunferência, sem tecer maiores considerações a respeito da continuidade da reta, nem sobre a convexidade do círculo.

Para maior clareza, vejamos um exemplo de definição e outro de demonstração, tirados de suas aulas, segundo as recordo.

**Números:** “Número inteiro é o resultado de uma contagem de objetos. Números ocorrem, mais geralmente, como resultados de medidas. Medir uma grandeza é compará-la com outra de mesma espécie chamada *unidade*. Se uma grandeza  $A$  está contida exatamente, numa grandeza  $B$ , um número inteiro de vezes, diz-se que  $B$  é um *múltiplo* de  $A$  e  $A$  é um *submúltiplo* de  $B$ . Se algum submúltiplo de  $A$  é também submúltiplo de  $B$ , então as grandezas  $A$  e  $B$  dizem-se *comensuráveis*. Caso contrário,  $A$  e  $B$  dizem-se *incomensuráveis*. Um número racional é a medida de uma grandeza comensurável com a unidade. Quando uma grandeza é incomensurável com a unidade, sua medida é um número irracional. Exemplos: o lado e a diagonal de um quadrado são grandezas incomensuráveis; o diâmetro e a circunferência também são incomensuráveis. Para algumas grandezas, há também uma noção de sentido, positivo ou negativo. (Exemplos: temperatura, saldo bancário, corrente elétrica, altitude etc.) A medida dessas grandezas é um número relativo, isto é, provido de um sinal + ou -.”

Naturalmente, essas noções não eram apresentadas assim, de enxurrada, mas intercaladas com exemplos e explicações. O importante é notar nas definições acima uma conexão entre a Matemática e a realidade, uma explicação concreta da noção de número irracional e uma atitude honesta, direta e desmitificadora. Essas qualidades objetivas, presentes nos bons compêndios franceses de Matemática do começo do século 20 e sensatamente copiadas em nossos melhores da época, parecem ter sido erradamente varridas junto com o entulho que aqueles compêndios também continham. Foram substituídas pelo formalismo pedante e inócua da “Matemática moderna” que hoje, em declínio acentuado, deu lugar a uma penosa indefinição de personalidade existente na maioria dos textos atuais.

A propósito, Benedito de Moraes nunca adotou nenhum dos textos existentes. Recomendava-os mas não os seguia. Em primeiro lugar, porque fazia tudo de modo mais simples e claro. E depois, mesmo que quisesse adotar um deles, isto seria incompatível com seu hábito de dar todo o programa, principalmente no chamado “curso colegial”.

**Um Teorema:** *Por um ponto dado numa reta passa uma e somente uma perpendicular a essa reta.*

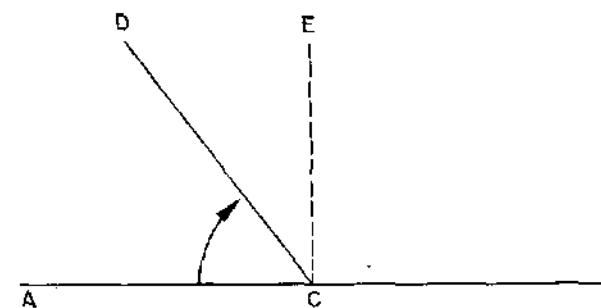


Figura 1

**Demonstração:** Pelo ponto  $C$  da reta  $AB$ , tracemos uma semi-reta  $CD$  de modo que o ângulo  $DCA$  seja menor do que o ângulo  $DCB$ . Fazendo girar a semi-reta  $CD$  em torno do ponto  $C$ , na direção da seta, vemos que o ângulo  $DCA$  aumenta enquanto  $DCB$  diminui até ficar menor do que  $DCA$ . Logo, deve haver uma posição  $CE$  na qual os dois ângulos  $ACE$  e  $ECB$  são iguais. Então, por definição,  $CE$  é perpendicular a  $AB$ . Em qualquer outra posição  $CD$ , ou teremos  $DCA < ECA < DCB$  ou

então  $DCB < ECB < DCA$ . Em qualquer caso, os dois ângulos  $DCA$  e  $DCB$  são diferentes, logo  $CD$  não é perpendicular a  $AB$ .

Como aluno do terceiro ano ginásial, esta demonstração me satisfiz plenamente. Mais do que isso: além de sua elegância, nela eu via um novo tipo de raciocínio (que hoje reconheço como o teorema do valor intermediário), tão marcante que ainda me lembro dos seus detalhes.

Mais tarde, ao prosseguir os estudos, me disseram que esta demonstração estava errada porque se baseava na idéia de movimento e na hipótese de continuidade da grandeza ângulo, coisas que não constavam dos axiomas, postulados e noções fundamentais que se admitiram no início da teoria, coisas que não tinham sido cuidadosamente discutidas antes, logo não poderiam ser utilizadas em demonstrações.

A crítica acima seria válida se considerássemos a Geometria como um sistema lógico-dedutivo, onde é feita uma lista completa dos axiomas e dos conceitos básicos não definidos, a partir da qual se dão todas as definições e se provam todas as afirmações, segundo os padrões impecáveis da lógica formal. Como nos "Fundamentos da Geometria", de Hilbert. Acontece porém que uma tal atitude não tem o menor cabimento no âmbito da Escola Secundária. A demonstração ali tem a finalidade de convencer o aluno por meio de argumentos precisos e claros, os quais poderão eventualmente valer-se de fatos aceitáveis (ainda que não explicitamente discutidos) que pertençam à experiência intuitiva e que possam ser provados rigorosamente em cursos mais avançados. Imperdoável seria utilizar-se de sofismas, raciocínios logicamente incorretos ou fatos matematicamente absurdos. Estou afirmando aqui que considero plenamente admissível, numa demonstração, lançar mão de resultados verdadeiros, intuitivamente óbvios, que são considerados evidentes pelos alunos, mesmo que não tenham sido esmiuçados logicamente. De resto, é assim que fazem os matemáticos profissionais em seus trabalhos de pesquisa.

No exemplo em questão, o argumento usado para demonstrar o teorema é absolutamente correto e fácil de justificar com todo o rigor se utilizarmos coordenadas cartesianas, ou se interpretarmos os pontos do plano como números complexos.

Assim, a demonstração acima para mim estava certa, depois estava errada e, afinal de contas, está certa. (Como aquela história do motorista, que pediu ao amigo: "Ponha a cabeça fora da janela e veja se a luz do pisca-pisca está acendendo." Resposta: "Está, não está, está, não está...")

Benedito de Moraes era o que se chamaria um cara "papo-firme". Falou, está falado. Suas definições e os enunciados dos seus teoremas eram sempre formulados com as mesmas palavras, não importa quantas vezes tivesse que repeti-los. As regras também. Isso era formidável. Facilitava grandemente a memorização, sem maior esforço. Decorar simplifica a vida e é, pelo menos, metade do compreender. Memorizar e raciocinar são funções distintas do cérebro; uma não atrapalha a outra; pelo contrário. Principalmente quando se é adolescente. Ainda hoje tenho gravadas na memória enunciados como:

"Num triângulo, a altura baixada do vértice do ângulo reto é a média geométrica entre os segmentos que ela determina sobre a hipotenusa."

"Em círculos iguais ou no mesmo círculo, arcos iguais subtendem cordas iguais."

"Todo número que divide dois outros, divide também o máximo divisor comum entre eles."

E muitos outros.

Acima, eu disse "as mesmas palavras". Isto mesmo. Ele nunca enunciava teoremas, regras ou definições com símbolos. Só usava palavras. (Sempre as mesmas.) Euclides fazia assim. Legendre (e quase todos os grandes autores franceses) também. Hoje em dia, Bourbaki é um dos poucos seguidores dessa bela tradição, que não apenas torna os enunciados mais elegantes, mas ajuda muito a retê-los em nossa mente, já que ninguém pensa por meio de símbolos mas com palavras e com as idéias que elas evocam ou representam.

O teorema sobre perpendiculares, que enunciamos e provamos acima, é formulado do seguinte modo num texto recente de Geometria publicado nos Estados Unidos: "Dada uma reta  $AB$  e um ponto  $C \in AB$ , existe uma e uma só reta  $CD$  tal que  $CD \perp AB$ ". Comparando este enunciado com o que demos acima, pode-se entender por que a Geometria perdeu tanto do seu prestígio no ensino.

Era piedoso com os fracos. Quando um aluno fazia bobagens no quadro negro, nunca permitia que o criticássemos, a não ser com bons modos. Éramos proibidos de dizer "está errado"; a expressão admitida era "parece que houve um engano", "não estou entendendo bem" ou algo assim. Nunca humilhava os alunos, tinha mais paciência com os mais atrasados embora não admitisse jamais baixar o nível ou retardar o curso por causa deles.

Algumas vezes por ano, dividia a turma em dois grupos ou “times”, cada um deles com um goleiro, escolhido entre os melhores alunos. O jogo consistia em perguntas sobre um tema previamente escolhido. Cada aluno de um time fazia uma pergunta a outro do time adversário. Se este respondesse, a bola tinha sido rebatida, não fora gol e os papéis se invertiam; quem recebeu a pergunta fazia outra ao mesmo aluno que lhe perguntara. Se uma pergunta não fosse respondida ou tivesse resposta incorreta (segundo o juiz), isto significava que a bola tinha passado pela defesa e ia ao goleiro daquele time. Se o goleiro não respondesse, era gol. Mas quem fez a pergunta teria que saber a resposta certa, senão o gol era anulado. No final da aula, o time vencedor era premiado com lápis muito bonitos, oferta do juiz-professor. (O goleiro ganhava dois lápis.)

Era muito exigente com asseio nos trabalhos, precisão de linguagem e organização nos cálculos. Insistia que o traço de fração estivesse a uma altura entre as duas barras do sinal de igualdade e que fosse a primeira coisa a ser escrita, antes do numerador e do denominador.

Fazia cálculos mentais com enorme rapidez, sabia de cor os logaritmos decimais de vários números e os valores das funções trigonométricas dos arcos mais comuns. Essas habilidades lhe poupavam muito tempo e contribuíam também para impor respeito a alunos, numa faixa de idade que outros professores achavam difícil de controlar.

Fora da Matemática, suas distrações eram ler romances policiais, dos quais tinha uma enorme coleção, e viajar pelo Brasil. Nas férias de cada ano, visitava um Estado diferente. Tinha um filho, que se chamava Demóstenes, e não Tales, ou Euclides, como era de se esperar. Queria que o rapaz seguisse engenharia e ficou decepcionado quando ele arranhou emprego num banco.

Pelo menos cinco de seus alunos fizeram pesquisas originais que os levaram ao doutorado em Matemática: Manfredo do Carmo, Roberto Ramalho, Edmilson Pontes, Alexandre Magalhães e eu. Vários outros (inclusive, por algum tempo, minha irmã Elina) foram por ele orientados para o magistério. E inúmeros engenheiros, oficiais das forças armadas, bancários, etc. devem a ele seu treinamento básico em Matemática.

Para mim, Benedito de Moraes é um símbolo de integridade, trabalho honesto e visão clara dos seus objetivos na vida. A única coisa que discordamos foi ele ter votado em Dutra numa eleição em que eu era

jovem demais para poder votar no Brigadeiro...

**Agradecimento:** A Manfredo do Carmo e Alexandre Magalhães por agradáveis conversas evocativas.

**A** crônica da equação do terceiro grau, apresentada a seguir, poderia talvez conter algumas palavras a mais sobre Ludovico Ferrari (1522 + 43 = 1565), que nasceu e morreu em Bolonha mas foi para Milão aos 14 anos a fim de trabalhar na casa de Cardano. Este, reconhecendo a excepcional inteligência do jovem, ensinou-lhe Latim e Matemática, promovendo-o a seu secretário. Aos dezoito anos, Ferrari tornou-se professor da Universidade de Milão e tinha apenas vinte e cinco anos quando de sua disputa com Tartaglia, depois da qual recebeu ofertas de emprego de pessoas importantes, como o imperador Carlos V e o cardeal Gonzaga, de Mantua, a quem serviu durante oito anos. Razões de saúde o levaram de volta a Bolonha, onde morou com sua irmã, foi professor na universidade e morreu aos 43 anos. Sua participação na história que contamos aqui é importante, não apenas por sua colaboração decisiva para o livro "Ars Magna" de Cardano, mas principalmente por ter sido o homem que, ao deduzir a fórmula de resolução por radicais da equação do 4º grau, atingiu o limite do possível.

Com efeito, dois séculos e meio depois, Paolo Ruffini (1765 + 57 = 1822) publicou em Bolonha (1799) um livro no qual demonstrou que a equação geral de grau superior ao quarto não pode ser resolvida por meio de radicais. Independentemente disto, o jovem matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802 + 27 = 1829) pensou ter descoberto, em 1821, uma fórmula que expressava as raízes de uma equação do quinto grau por meio de radicais. Verificou porém que havia um erro em sua demonstração e, retornando ao problema três anos depois (1824), provou que as equações de grau superior ao quarto não possuem fórmula geral de resolução por radicais. A demonstração de Abel é considerada satisfatória enquanto que na de Ruffini têm sido observadas lacunas. O problema geral de determinar quais equações de grau  $n$  têm suas raízes expressas sob forma de radicais em função dos coeficientes só veio ter uma solução definitiva com o trabalho do genial matemático francês Evariste Galois (1811 + 21 = 1832). Este obteve uma condição necessária e suficiente, a saber, que o "grupo de Galois" da equação seja um grupo solúvel. Para entender o que significa isto, veja, por exemplo, o livro "Introdução à Álgebra", por Adilson Gonçalves. (Projeto Euclides, IMPA, 1987, segunda edição.)

# A Equação do Terceiro Grau

A história da solução da equação do terceiro grau tem vários aspectos interessantes, em virtude dos quais ela se constitui num tópico atraente para estudo e discussão entre alunos e professores de Matemática.

Um desses aspectos é o enigma histórico. Se os babilônios já sabiam resolver a equação do segundo grau mil e setecentos anos antes da era cristã, por que se teve de esperar mais de três mil anos até que Scipione Ferro resolvesse a equação do terceiro grau e Ludovico Ferrari, logo em seguida, a do quarto grau? Há também o lado humano, as figuras pitorescas e fascinantes dos homens envolvidos nas descobertas e nas disputas daí decorrentes. Além disso, tem-se ainda o aspecto científico, os progressos matemáticos que advieram da solução e o grande problema geral da resolução por radicais, somente elucidado trezentos anos depois, por Ruffini, Abel e Galois. Tudo isto sem falar no cenário, aquela notável atmosfera de elevada excitação intelectual existente na Itália da época renascentista.

A fim de dar ao leitor uma idéia do ambiente em que se desenrolou a saga que vamos relatar, achamos oportuno encerrar esta introdução com dois trechos retirados do livro "Histoire des Sciences Mathématiques en Italie", de G. Libri, Paris, 1840 (pags. 6 e 152 do vol. III):

"Em nossa opinião, como já repetimos tantas vezes, é o caráter, é a energia que faz os grandes homens, e o talento nunca faltou aos povos que sentem e que desejam com todo ardor. Entretanto, uma reunião de homens como Leonardo da Vinci, Machiavel, Colombo, Raphael, Michelângelo, Ariosto, que congregaram plêiades de discípulos ilustres e de rivais, é um fato que nenhuma pesquisa histórica parece poder explicar."

"Os *quesiti* são uma coleção, em nove livros, de respostas dadas por Tartaglia a questões que lhe eram endereçadas por príncipes, monges, doutores, embaixadores, professores, arquitetos, etc. Frequentemente, essas questões continham problemas do terceiro grau. Ao ver todos esses problemas propostos no começo do século XVI, compreende-se a importância que se atribuía naquela época às descobertas algébricas. Seria difícil achar na história das ciências exemplo de fato semelhante. As

apostas, as disputas públicas, os panfletos se sucediam sem interrupção: todas as classes da sociedade se interessavam por essas lutas científicas, do mesmo modo como na antigüidade se interessavam pelos desafios dos poetas e pelos jogos dos atletas. Parecia que se pressentia a descoberta, e a descoberta não se fez esperar."

Evidentemente, nas limitadas dimensões deste artigo não seria possível tratar exaustivamente todos os ângulos acima aludidos do episódio que vamos narrar. Procuraremos, entretanto, fazer uma exposição coerente e inteligível, a qual será dividida em três partes: História, Álgebra e Cálculo.

## 1. História

Lendo o primeiro capítulo do livro de A. Aaboe "Episódios da História Antiga da Matemática", publicado pela SBM, aprendemos que os matemáticos babilônios, por volta do ano 1700 AC, já conheciam regras para resolver equações do segundo grau, sob forma de problemas, como o de achar dois números conhecendo sua soma  $s$  e seu produto  $p$ . (Esses números são as raízes da equação  $x^2 - sx + p = 0$  e, na realidade, achar as raízes de qualquer equação do segundo grau equivale a resolver um problema desse tipo.) No Capítulo 2 daquele livro, aprendemos que os gregos aperfeiçoaram esse conhecimento demonstrando tais regras e conseguindo, pela utilização de processos geométricos, obter raízes irracionais (representadas por certos segmentos de retas) mesmo numa época em que os números irracionais não eram ainda conhecidos.

Na "História da Matemática" de C. Boyer é contada com maiores detalhes a evolução da disciplina conhecida pelo nome de Álgebra, palavra árabe que constava do título do livro de Mohamed ibn Musa al Khwarizm, livro que teve grande influência na preservação do conhecimento matemático durante a Idade Média.

Ainda no livro de Boyer, lemos sobre as contribuições do extraordinário matemático Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, que viveu no começo do século XII, foi autor de livros notáveis, continuando a obra de Diofanto de Alexandria sobre soluções inteiras de equações indeterminadas e teve seu nome imortalizado na "seqüência de Fibonacci" 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 etc, onde cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois que o precedem imediatamente. Esta seqüência originou-se num problema sobre reprodução de coelhos mas tem aplicações surpreendentes e variadas. (V. pag. 186 do livro de Boyer.) Os livros de Fibonacci,

embora de alto valor científico, não tiveram aceitação e influência educacional comparáveis, por exemplo, às de al Khwarizm, um compilador muito bem sucedido.

No meio do século XV teve início o fenômeno sócio-cultural conhecido como a Renascença, caracterizado por uma renovação do interesse pelas coisas do espírito em seus mais altos níveis, por uma efervescência criativa e uma extraordinária explosão produtiva nas artes plásticas, literatura, arquitetura e ciências. Seu epicentro se localizou na Itália, onde surgiram gênios do porte daqueles já mencionados por G. Libri, aos quais acrescentaremos Scipione Ferro, Girolamo Cardano, Niccoló Tartaglia, Ludovico Ferrari e Galileu Galilei, que nasceu no dia em que morreu Michelângelo e viria a morrer no ano do nascimento de Isaac Newton, fazendo lembrar uma corrida de revezamento olímpico.

Em 1494, Frei Luca Pacioli, amigo de Leonardo da Vinci, renomado professor de Matemática, tendo ensinado em diversas Universidades da Itália, escreveu o livro "Summa de Aritmética e Geometria", um bom compêndio de Matemática, contendo noções de cálculo aritmético, radicais, problemas envolvendo equações do primeiro e segundo grau, geometria e contabilidade. Até o aparecimento da Álgebra de Raphael Bombelli, em 1572, o livro de Luca Pacioli (que tinha, além de suas qualidades intrínsecas, a vantagem sobre seus predecessores trazida pela invenção de Guttemberg) teve grande divulgação e prestígio. Como era costume, a incógnita, que hoje chamamos  $x$ , era nele denominada "a coisa", enquanto  $x^2$  era "censo",  $x^3$  era "cubo",  $x^4 =$  censo censo, etc. A Álgebra era na época chamada "a arte da coisa" ou "arte maior". Depois de ensinar, sob forma de versos, a regra para resolver a equação do segundo grau, Pacioli afirmava que não podia haver regra geral para a solução de problemas do tipo "cubo e coisas igual a número", ou seja,  $x^3 + px = q$ .

Muitos matemáticos, entre os quais Girolamo Cardano, de quem falaremos a seguir, acreditaram nessa afirmação peremptória de Pacioli. Mas um, pelo menos, não acreditou e fez muito bem em ser cético.

Coube a Scipione Ferro (1465 + 61 = 1526), professor da Universidade de Bolonha, personagem sobre cuja vida muito pouco se conhece, a glória de resolver esse problema de 3 mil anos. Ao que se saiba, ninguém jamais superou seu recorde, resolvendo um problema que tenha desafiado a argúcia dos matemáticos por mais tempo. O curioso é que Ferro nunca publicou sua solução. Na realidade, nunca publicou nada. Sabemos que a

duas pessoas ele comunicou o segredo da solução dos problemas do tipo "cubo e coisas igual a número" ( $x^3 + px = q$ ) e "cubo igual a coisas e número" ( $x^3 = px + q$ ): seus discípulos Annibale Della Nave (mais tarde seu genro e sucessor na cadeira de Matemática em Bolonha) e Antonio Maria Fiore. A este último, deu a regra mas não a prova. A descoberta ocorreu provavelmente em torno de 1515. Em 1535 Fiore teve a infeliz idéia de desafiar Tartaglia para uma disputa matemática.

Como vimos acima, esses duelos intelectuais não eram infreqüentes. Eram cercados de ritual, presididos por alguma autoridade e muitas vezes assistidos por numerosa audiência. Alguns contratos de professores universitários eram temporários e muitas vezes a permanência na cátedra dependia de um bom desempenho nessas disputas. Isto talvez explique a atitude sigilosa de Ferro; era bom ter uma bala na agulha para o caso de necessidade. Divulgar sua descoberta seria gastar munição à toa.

Niccoló Tartaglia era professor em Veneza e já tinha derrotado outros desafiantes. Fiore propôs 30 problemas, todos envolvendo, de um modo ou de outro, equações do terceiro grau. Tartaglia fez também sua lista, de natureza bem mais variada. A única arma de Fiore era a fórmula de Ferro. As de Tartaglia eram seu sólido conhecimento e sua inteligência. Oito dias antes do encontro, depois de longas tentativas, ocorreu a Tartaglia como deduzir a fórmula da equação do terceiro grau. Sem dúvida, isto foi uma notável descoberta, porém não tão grande quanto a de Ferro pois Tartaglia sabia, pelas questões que lhe foram propostas, que uma tal fórmula devia existir, enquanto Ferro não podia ter essa certeza. Quem já fez pesquisa em Matemática sabe a grande diferença que isso faz. É a mesma que existe entre resolver um exercício ou demonstrar um novo teorema. Seja como for, Tartaglia resolveu de um golpe os 30 problemas de Fiore, ganhou a disputa e recusou magnanimamente os 30 banquetes estipulados como prêmio ao vencedor.

Notícias sobre o concurso e a natureza dos problemas resolvidos chegaram a Milão, onde vivia o doutor Girolamo Cardano, que ficou muito curioso para saber se e como fora conseguido aquilo que Pacioli julgara impossível.

Cardano usou de todos os meios para atrair Tartaglia a sua casa e lá, mediante promessa de guardar segredo, obteve dele, em 1539, a regra para resolver a equação  $x^3 + px = q$ , dada sob forma de versos um tanto enigmáticos, sem nenhuma indicação de prova.

A vida de Niccoló Tartaglia (1499 + 58 = 1557) foi muito difícil. Nascido em Brescia, ficou órfão de pai aos seis anos e foi criado, com seus três irmãos, por uma mãe devotada e paupérrima. Aos 14 anos, no saque de Brescia por tropas francesas, refugiou-se na Catedral mas, ali mesmo, foi seriamente ferido no rosto por golpes de sabre que lhe deixaram desfigurado e, por longo tempo, quase sem poder falar. Isto lhe valeu o apelido de Tartaglia (o tartamudo), que posteriormente assumiu como sobrenome. Aprendeu sozinho, “somente em companhia de uma filha da pobreza chamada diligência, estudando continuamente as obras dos homens defuntos”. Superou todas as dificuldades e conseguiu chegar ao limite do conhecimento da época em Matemática, Mecânica, Artilharia e Agrimensura. Descobriu a lei de formação dos coeficientes de  $(x + a)^n$  e foi autor de algumas descobertas sobre tiro e fortificações. Por causa delas, sonhava conseguir recompensa do comandante militar de Milão. Esta foi a isca usada por Cardano para atraí-lo.

Girolamo Cardano (1501 + 75 = 1576) era um personagem rico em facetas contraditórias e em talentos vários. Sua vida lhe trouxe alternâncias de fama, fortuna, prestígio, desgraça familiar, severas punições e pobreza. Era médico, astrônomo, astrólogo, matemático, filósofo, jogador inveterado e um incansável investigador, cuja curiosidade e interesse por todos os tipos de conhecimento não tinham limites. Escreveu muitos livros sobre todos estes assuntos (mais de cem!), inclusive uma interessantíssima e reveladora autobiografia. Tendo conseguido melhorar vários assuntos tratados por Pacioli, Cardano pretendia publicar um livro de Álgebra, ajudado por seu brilhante e fiel discípulo Ludovico Ferrari.

Depois da visita de Tartaglia, Cardano, com algum esforço, conseguiu demonstrar a validade da regra para resolver a equação  $x^3 + px = q$ . Naquela época, não era costume concentrar os termos da equação no primeiro membro, deixando apenas zero depois do sinal de igualdade. Nem se percebia que uma equação sem o termo  $x^2$  é o mesmo que ter o mesmo termo com coeficiente zero.

Cardano mostrou que a substituição  $x = y - a/3$  permite eliminar o termo em  $x^2$  na equação  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  e, ao todo, deduziu as fórmulas para resolver 13 tipos de equações do terceiro grau! Evidentemente, hoje essas fórmulas se reduziram a uma única. Mas é preciso observar que as equações daquele tempo eram todas numéricas. (O uso de letras para representar números em Álgebra teve início com François

Viète, em 1591.) Logo, a rigor, não havia fórmulas e sim receitas ou regras, explicadas com exemplos numéricos, uma regra para  $x^3 + px = q$ , outra para  $x^3 = px + q$ , outra para  $x^3 + px^2 = q$ , etc.

Os estudos de Cardano, feitos com a colaboração de Ferrari, o qual obteve a solução por radicais da equação do quarto grau, conduziram a importantes avanços na teoria das equações, como o reconhecimento de raízes múltiplas em vários casos, relações entre coeficientes e raízes, e aceitação de raízes negativas, irracionais e imaginárias. (Por estes dois últimos nomes pode-se perceber a má vontade secular para considerá-las.) Cardano, entretanto, nunca enunciou explicitamente que uma equação qualquer do terceiro grau deve ter três raízes e uma do quarto grau quatro raízes. Isto foi feito depois, por Bombelli. Todos esses progressos eram razões mais do que suficientes para a publicação de um livro sobre o assunto. Mas isto ele estava impedido de fazer em virtude de seu juramento a Tartaglia.

Em 1542, entretanto, Cardano e Ferrari visitaram Bolonha e lá obtiveram permissão de Della Nave para examinar os manuscritos deixados por Ferro, entre os quais estava a solução da equação  $x^3 + px = q$ . O juramento de Cardano o proibia de publicar a solução de Tartaglia mas não a de Ferro, obtida muito antes. Por isso, ele se considerou desobrigado de qualquer compromisso e voltou-se, com energia, à preparação de seu grande livro “Ars Magna”, que foi publicado em 1545. O aparecimento dessa notável obra foi recebido favoravelmente pelos entendidos mas provocou reação bem desfavorável de Tartaglia.

Com efeito, no ano seguinte (1546) Tartaglia publica os “Quesiti e Inventioni Diverse”, livro já mencionado acima, no qual ele, além de apresentar soluções para vários problemas que lhe foram propostos, descreve fatos autobiográficos e conta a história de suas relações com Cardano, atacando-o asperamente pela quebra de um solene juramento.

Nas situações de controvérsia, quase sempre ocorre que cada uma das partes tem razão em alguns pontos e não tem noutros. Vimos acima as razões de Cardano. As razões de Tartaglia, a História comprova. Por muitos séculos, a fórmula da equação do terceiro grau foi conhecida como “fórmula de Cardano”, por ter sido publicada pela primeira vez na “Ars Magna”, muito embora Cardano tenha dito que a fórmula fora descoberta por Ferro e redescoberta por Tartaglia. Se a fórmula fosse publicada num livro de Tartaglia, a posteridade certamente a conheceria por seu nome.

Assim, ele tinha seus motivos para zanga.

A publicação dos "Quesiti" foi respondida por um panfleto de Ferrari (1522 + 43 = 1565) em defesa do seu mestre, o que provocou uma réplica de Tartaglia, iniciando-se uma polêmica que durou mais de um ano (fevereiro de 1547 a junho de 1548) e produziu os 12 panfletos (seis de cada autor), conhecidos como "Cartelli di Sfida Mathematica". (Sfida significa disputa.) No final, Tartaglia aceitou o desafio para um debate matemático contra Ferrari em Milão. (Cardano manteve-se sempre fora da briga, apesar das provocações de Tartaglia.) O resultado do debate não ficou muito claro mas as autoridades universitárias em Brescia, para onde Tartaglia acabara de transferir-se, não ficaram satisfeitas com seu desempenho e cortaram seu contrato. Ele regressou a Veneza, onde morreu, humilde e obscuro, nove anos depois.

Feita esta narração, vejamos agora como se resolve a equação do terceiro grau.

## 2. Álgebra

A equação mais geral do terceiro grau é  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ . Ela é equivalente a

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Logo, basta considerar equações em que o coeficiente de  $x^3$  é igual a 1.

Dada a equação  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , a substituição  $x = y - a/3$  a transforma em

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0,$$

ou seja:

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0,$$

que é uma equação desprovida de termo do segundo grau. Portanto, é suficiente estudar as equações do terceiro grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0.$$

Para resolver esta equação, escrevemos  $x = u + v$ . Substituindo, obtemos

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0,$$

isto é:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Portanto, se conseguirmos achar números  $u, v$  tais que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \cdot v = -p/3 \end{cases}, \text{ ou seja, } \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 \cdot v^3 = -p^3/27, \end{cases}$$

então  $x = u + v$  será raiz da equação  $x^3 + px + q = 0$ .

Ora, o problema de achar  $u^3$  e  $v^3$  conhecendo a sua soma e o seu produto é, como sabemos, de fácil solução:  $u^3$  e  $v^3$  são as raízes da equação do segundo grau

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Utilizando a fórmula clássica para resolver esta equação, obtemos

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \text{ e } v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

e conseqüentemente,

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Assim,  $x = u + v$ , dada pela fórmula acima, é uma raiz da equação  $x^3 + px + q = 0$ .

Na fórmula acima, destaquemos o radicando

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Mostraremos na seção seguinte que se  $D > 0$  a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas; se  $D = 0$  têm-se três raízes reais, sendo uma repetida; se  $D < 0$  então as três raízes da equação  $x^3 + px + q = 0$  são reais e distintas. Este é um aspecto paradoxal da fórmula de Ferro e Tartaglia. Quando  $D < 0$ , a fórmula exprime  $x = u + v$  como soma de duas raízes cúbicas de números complexos. No entanto é este o caso em que a equação possui três raízes reais distintas. Este é chamado tradicionalmente o "caso irredutível" porque, ao tentar eliminar os radicais, recai-se noutra equação do terceiro grau.

Vejam alguns exemplos, retirados do livro de Álgebra de Leonard Euler, escrito em 1770, o qual serviu de modelo para os compêndios utilizados por sucessivas gerações de estudantes.

**Exemplo 1:**  $x^3 - 6x - 9 = 0$ . Aqui,  $D = 49/4 = (7/2)^2 > 0$ . Logo, a fórmula nos dá a raiz  $x = 2 + 1 = 3$ . Dividindo  $x^3 - 6x - 9$  por  $x - 3$ , obtemos  $x^2 + 3x + 3$ , logo as duas raízes restantes são as da equação  $x^2 + 3x + 3 = 0$ , isto é,  $-3/2 + i\sqrt{2}/2$  e  $-3/2 - i\sqrt{2}/2$ . Evidentemente, a raiz 3 (como toda raiz inteira) poderia ser sido obtida mediante simples inspeção, examinando-se os divisores do termo independente  $-9$ , sem necessidade de usar a fórmula.

**Exemplo 2:** Na equação  $x^3 - 6x - 40 = 0$ , temos  $D = 392 = (14\sqrt{2})^2$  logo a fórmula nos dá a raiz

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

e, como foi dito acima, as outras duas raízes são números complexos conjugados. Mas, testando os divisores de 40, vemos que 4 é raiz. Como não há outra raiz real, concluímos que

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4,$$

sem dúvida uma identidade interessante. Como  $(x^3 - 6x - 40) \div (x - 4) = x^2 + 4x + 10$  e as raízes deste trinômio são  $-2 \pm i\sqrt{6}$ , obtemos as 2 raízes (complexas) que faltavam. Aqui, a fórmula novamente não foi necessária.

**Exemplo 3:** Seja  $x^3 + 3x + 2 = 0$ . Temos  $D = 2$ , logo

$$r = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}} = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} - \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$$

é raiz da equação. As outras duas raízes são complexas; elas são obtidas resolvendo a equação do segundo grau  $x^2 + ax + b = 0$ , onde  $x^2 + ax + b = (x^3 + 3x + 2) \div (x - r)$ . Portanto  $a = r$  e  $b = r^2 + 3$ , isto é, a equação do 2º grau cujas raízes (complexas) são as duas outras raízes de  $x^3 + 3x + 2 = 0$  é a equação  $x^2 + rx + r^2 + 3 = 0$ , onde  $r$  foi dada acima. Aqui, a fórmula foi essencial para nos conduzir à raiz  $r$ .

**Exemplo 4:**  $x^3 - 3x - 2 = 0$ . Neste caso,  $D = 0$  e a fórmula nos dá a raiz  $x = 2$ . Como  $(x^3 - 3x - 2) \div (x - 2) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ , as outras raízes são  $-1$  e  $-1$ , ou seja, uma raiz dupla. Novamente neste

exemplo, chegaríamos às raízes simplesmente examinando os divisores de 2, pois a equação não tem raízes irracionais.

**Exemplo 5:** A equação  $x^3 - 6x - 4 = 0$  nos dá  $D = -4 < 0$ . Portanto ela deve ter 3 raízes reais distintas. A fórmula fornece uma delas:

$$x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}.$$

Isto parece um número complexo mas, pelo que demonstraremos na seção seguinte, tem que ser um número real. Ora, testando os divisores de  $-4$ , termo independente de  $x$ , vemos que  $-2$  é raiz da equação proposta. As outras duas são as raízes de  $x^2 - 2x - 2 = 0$  porque  $x^2 - 2x - 2 = (x^3 - 6x - 4) \div (x + 2)$ . Logo, as três raízes da equação proposta são  $-2, 1 + \sqrt{3}$  e  $1 - \sqrt{3}$ . Este é um exemplo do caso irreduzível: três raízes reais mas a fórmula nos dá um radical complexo. Aqui surge uma questão interessante. Uma dessas três raízes deve ser igual a  $\sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$ . Qual delas?

A questão pode ser interessante mas a pergunta não está muito bem formulada. Quando  $z$  é um número complexo, o símbolo  $\sqrt[3]{z}$  significa qualquer número cujo cubo seja igual a  $z$ . Excetuando-se  $z = 0$ , há sempre três números complexos cujo cubo é  $z$ . Por exemplo, tomando  $z = 1$ , vemos que os três números  $1, \alpha = (-1 + i\sqrt{3})/2$  e  $\alpha^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$  têm todos cubo igual a 1. Estas são as raízes cúbicas da unidade. Dado qualquer número complexo  $z$ , se  $w$  é uma raiz cúbica de  $z$ , as outras duas são  $\alpha w$  e  $\alpha^2 w$ , onde  $\alpha = (-1 + i\sqrt{3})/2$ .

Na fórmula  $x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$ , que dá uma raiz da equação  $x^3 - 6x - 4 = 0$ , cada radical tem portanto 3 valores. Olhando assim, parece que obteremos ao todo 9 raízes para a equação dada. Claro que não. Temos  $x = u + v$ , com  $uv = -p/3 = 2$ , logo  $v = 2/u$ . Isto mostra que, quando escolhemos um valor para  $u$  (entre os 3 valores possíveis de  $\sqrt[3]{2 + 2i}$ ), o valor correspondente de  $v$  fica determinado. Assim, temos somente 3 raízes. Ainda bem.

Mas, como se faz para calcular  $\sqrt[3]{2 + 2i}$  e  $\sqrt[3]{2 - 2i}$  ?

Usando a notação  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , temos

$$2 + 2i = \sqrt{8} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{8} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{8} \cdot e^{i\pi/4}.$$

Portanto um dos três valores de  $\sqrt[3]{2+2i}$  é

$$u_1 = \sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\pi/12} = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/12} = \sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ).$$

O valor correspondente de  $v$  é:

$$v_1 = \frac{2}{u_1} = \frac{2}{|u_1|^2} \bar{u}_1 = \bar{u}_1 = \sqrt{2}(\cos 15^\circ - i \sin 15^\circ).$$

Logo uma das raízes da equação é

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt{2} \cos 15^\circ = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = 1 + \sqrt{3},$$

que é uma das três raízes que conhecíamos. Ela foi obtida porque escolhemos  $e^{i\pi/12}$  como valor da raiz cúbica de  $e^{i\pi/4}$ . Se tivéssemos escolhido  $e^{i3\pi/4} = \cos 135^\circ + i \sin 135^\circ$  obteríamos a raiz  $x_2 = -2$  e, se tomássemos  $e^{-7\pi/12} = \cos 105^\circ - i \sin 105^\circ$  como raiz cúbica de  $e^{i\pi/4}$ , obteríamos  $x_3 = 1 - \sqrt{3}$ .

Na seção seguinte, mostraremos como fatos elementares de Cálculo podem ser usados para explicar a natureza das raízes da equação  $x^3 + px + q = 0$  a partir do sinal do discriminante  $D = p^2/4 + p^3/27$ .

### 3. Cálculo

Vamos examinar o gráfico da função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = x^3 + px + q$ . Cada ponto que o gráfico tiver em comum com o eixo das abscissas corresponderá a uma raiz real da equação  $x^3 + px + q = 0$ .

Preliminarmente, observemos que

$$f(x) = x^3 \left( 1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3} \right).$$

Para valores de  $x$  que tenham valor absoluto muito grande,  $p/x^2$  e  $q/x^3$  são insignificantes logo, para tais valores, na soma dentro dos parênteses prevalece o sinal de 1, que é positivo. Então o sinal de  $f(x)$ , quando o valor absoluto de  $x$  é muito grande, é o mesmo sinal de  $x^3$ , isto é, de  $x$ . Em particular, o polinômio  $f(x)$  é negativo para valores muito grande negativos de  $x$  e é positivo se  $x$  é um número positivo muito grande. Segue-se daí que  $f(x)$ , por passar continuamente de negativo a positivo, deve anular-se em algum ponto. Toda esta conversa serve para concluir que toda equação do terceiro grau tem pelo menos uma raiz real. Ou seja: o gráfico de  $f(x) = x^3 + px + q$  corta o eixo das abscissas em pelo menos

um ponto.

Quando  $p > 0$ , a derivada  $f'(x) = 3x^2 + p$  é sempre positiva, logo  $f$  é uma função crescente, que corta o eixo  $x$  num único ponto. Logo, quando  $p > 0$ , a equação  $x^3 + px + q = 0$  tem uma única raiz real, a qual pode ser positiva, negativa ou nula, e duas raízes complexas conjugadas.

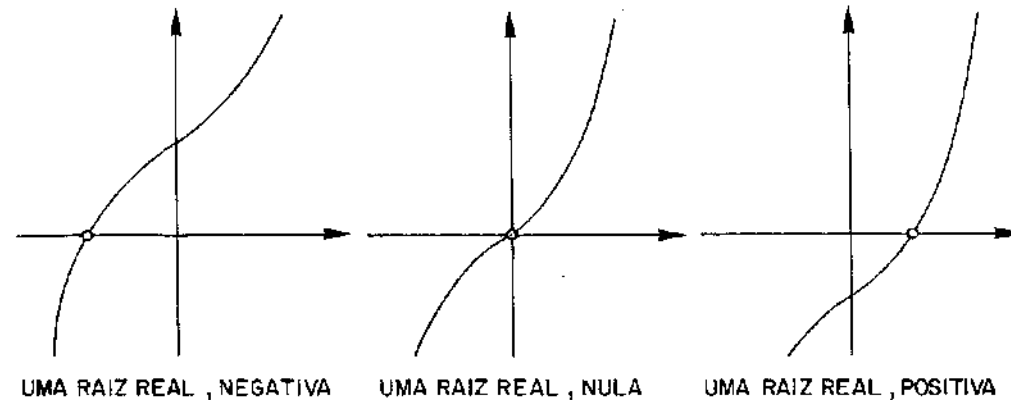


Figura 1. O gráfico de  $x^3 + px + q$  no caso  $p > 0$ . A raiz real nula ocorre se  $q = 0$ .

Quando  $p = 0$ , a equação reduz-se a  $x^3 = -q$  logo tem uma raiz real e duas complexas quando  $q \neq 0$  e uma raiz real tripla (igual a zero) se  $q = 0$ . Os gráficos correspondentes são dados abaixo.

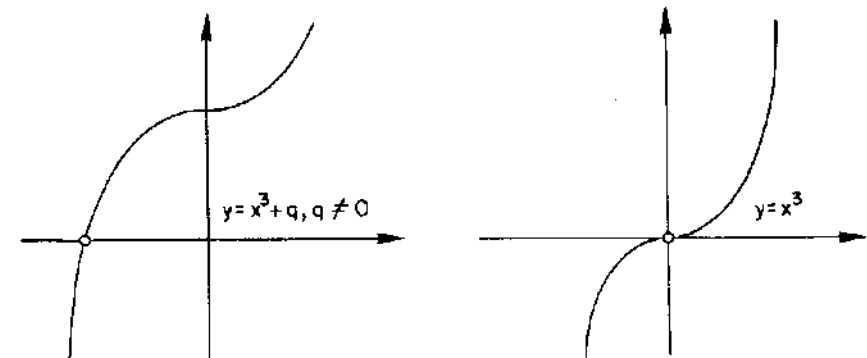


Figura 2. Notam-se tangentes horizontais se  $x = 0$ , em ambos os casos.

Consideremos agora o caso mais interessante, em que  $p < 0$ . Então

podemos escrever  $p = -3a^2, a > 0$ . A função se torna  $f(x) = x^3 - 3a^2x + q$ , e sua derivada é  $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$ , que se anula nos pontos  $x = \pm a$ . Como a derivada segunda  $f''(x) = 6x$  é negativa no ponto  $x = -a$ , este é um ponto de máximo. Por motivo análogo, a função tem um mínimo no ponto  $x = a$ . O gráfico de  $f$  apresenta uma das formas abaixo, conforme a equação  $x^3 + px + q = 0$  tenha uma raiz real e duas complexas, uma raiz real simples e uma dupla, ou três raízes reais distintas.

Estes três casos correspondem, respectivamente, a

$$f(a) \cdot f(-a) > 0, f(a) \cdot f(-a) = 0 \quad \text{e} \quad f(a) \cdot f(-a) < 0.$$

Temos:

$$\begin{aligned} f(a) \cdot f(-a) &= (q - 2a^3)(q + 2a^3) = q^2 - 4a^6 = \\ &= q^2 + \frac{4}{27}p^3 = 4 \left( \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right) = 4D. \end{aligned}$$

(Lembremos que  $p = -3a^2$ .) Portanto, o sinal de  $f(a) \cdot f(-a)$  é o mesmo do discriminante  $D$ .

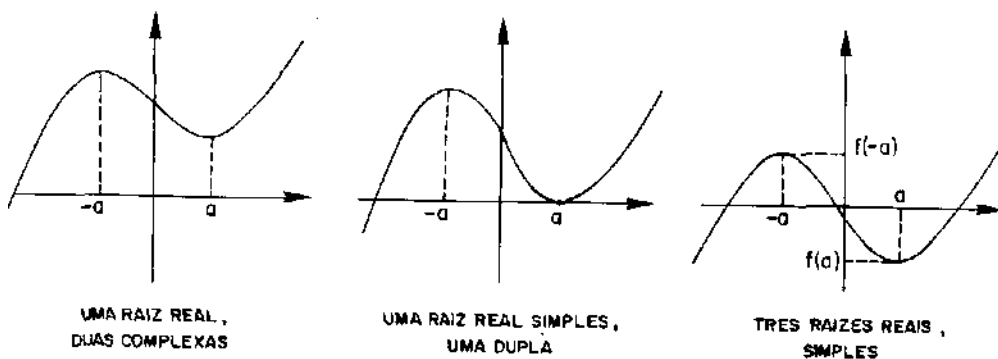


Figura 3.

Conclusão: a equação do 3º grau  $x^3 + px + q = 0$  tem uma, duas ou três raízes reais distintas conforme  $D = q^2/4 + p^3/27$  seja positivo, nulo, ou negativo, respectivamente.

## Referências

Além dos livros de Aaboe, Libri e Boyer mencionados no texto, referências específicas sobre esse tema podem ser encontradas nas seguintes fontes:

1. Ore, O., "Cardano, the Gambling Scholar", Princeton University Press, 1953.
2. Van der Waerden, B.L., "A History of Algebra", Springer Verlag, 1985.
3. "Dictionary of Scientific Biography", Scribner's, 1970.
4. Tartaglia, N., "Quesiti et Inventioni Diverse", (publicação comemorativa do 4º centenário da morte de Niccolò Tartaglia), Brescia, 1959.

**O** artigo seguinte trata de alguns conceitos matemáticos que foram inventados para resolver determinados problemas mas que, com o decorrer do tempo e do uso, mostraram possuir aplicações bem mais amplas e diferentes daquelas originalmente cogitadas.

Não é difícil achar exemplos de situações desse tipo, até mesmo fora da Matemática. (Afinal de contas, a coca-cola foi inicialmente fabricada como remédio para o estômago.) Os três exemplos que escolhemos para ilustrar nosso tema (logaritmos, números complexos e trigonometria) destacam-se, entretanto, por várias razões, entre as quais mencionaremos duas.

Em primeiro lugar, são assuntos do currículo do 2º grau que possuem enorme relevância pois, além das aplicações imediatas, vão ser fundamentais para todos aqueles que prosseguirão seus estudos e, na Universidade, terão que estudar Cálculo, disciplina onde os três referidos assuntos são quase ubíquos.

Em segundo lugar, logaritmos, números complexos e trigonometria fornecem um raro exemplo de síntese e unificação. (Veja o tópico: "Números negativos possuem logaritmos?" na seção "Conceitos e Controvérsias".) Isto é conseguido pela função de Euler  $E : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$ , que introduzimos e explicamos no artigo. Esta função é a base da trigonometria. Além disso, sua propriedade fundamental  $E(s + t) = E(s) \cdot E(t)$ , provada no texto, mostra que as fórmulas usuais de adição de arcos, para o seno e o cosseno, nada mais são do que uma interpretação da regra bem conhecida: para multiplicar potências de mesma base, somente somam-se os expoentes.

Quando se ensina, na escola secundária, o conceito de função, é-se limitado a dar dois tipos de exemplo: os artificiais, irrelevantes, e as funções definidas por fórmulas numéricas. A função de Euler constitui um tópico bastante instrutivo porque, não se enquadrando em nenhum desses tipos, mostra de forma bem clara como o conceito geral de função pode ser utilizado para obter resultados interessantes e elucidativos.

# Sobre a Evolução de Algumas Idéias Matemáticas

Vários conceitos básicos da Matemática, criados para atender a certas necessidades e resolver problemas específicos, revelaram posteriormente uma utilidade bem mais ampla do que a inicialmente pensada e vieram, com a evolução das idéias e o desenvolvimento das teorias, a adquirir uma posição definitiva de grande relevância nesta Ciência. Em alguns casos, a utilidade original foi, com o tempo, superada por novas técnicas mas a relevância teórica se manteve.

Ilustraremos essa observação com três exemplos.

## 1. Logaritmos

Os logaritmos foram inventados no início do século 17, a fim de simplificar as trabalhosas operações aritméticas dos astrônomos, com vistas à elaboração de tabelas de navegação.

Com efeito, a regra  $\log(xy) = \log x + \log y$  e suas conseqüências, tais como  $\log(x/y) = \log x - \log y$ ,  $\log(x^n) = n \cdot \log x$ ,  $\log \sqrt[n]{x} = (\log x)/n$ , permitem reduzir cada operação aritmética (exceto, naturalmente, a adição e a subtração) a uma operação mais simples, efetuada com os logaritmos. Esta maravilhosa utilidade prática dos logaritmos perdurou até recentemente, quando foi vastamente superada pelo uso das calculadoras eletrônicas.

A função logaritmo, entretanto, juntamente com sua inversa, a função exponencial, permanece como uma das mais importantes na Matemática, por uma série de razões que vão muito além da sua utilidade como instrumento de cálculo aritmético. Por exemplo, a própria identidade  $\log(xy) = \log x + \log y$ , a par do seu grande apelo estético, serve para mostrar que não existe diferença estrutural (intrínseca) entre as operações de adição de números reais e a multiplicação de números reais positivos. Mas a principal razão da relevância dos logaritmos (ou, o que é o mesmo, das exponenciais) provém de uma propriedade que já havia sido observada há cerca de 300 anos, sobre a qual diremos algumas palavras agora.

As primeiras pessoas que se ocuparam da elaboração de tábuas de logaritmos não podem ter deixado de notar que, para pequenos valores de  $h$ , a razão  $[\log(x+h) - \log x]/h$  entre o acréscimo de  $\log x$  e o acréscimo  $h$  dado a  $x$  é, aproximadamente, proporcional a  $1/x$ . Quando se usam os logaritmos naturais (que têm como base o número “ $e$ ”) a constante de proporcionalidade é igual a 1, de modo que o quociente  $[\log(x+h) - \log x]/h$ , para valores pequenos de  $h$ , é aproximadamente igual a  $1/x$ . Daqui em diante, falaremos apenas de logaritmos naturais.

A inversa da função logaritmo  $y = \log x$  é a função exponencial  $x = e^y$ , ou  $x = \exp y$ . Portanto  $\log(\exp y) = y$  para todo  $y \in \mathbb{R}$  e  $\exp(\log x) = x$  para todo  $x > 0$ . Quando atribuímos ao número  $y = \log x$  um pequeno acréscimo  $k$ , o novo valor  $y + k$  passa a ser o logaritmo de um número  $x + h$ , próximo de  $x$ . Podemos então escrever  $y + k = \log(x + h)$ ,  $y = \log x$  e  $k = \log(x + h) - \log x$ . Fazendo estas substituições, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\exp(y+k) - \exp y}{k} &= \frac{\exp(\log(x+h)) - \exp \log x}{\log(x+h) - \log x} = \\ &= \frac{h}{\log(x+h) - \log x} \approx x = \exp y, \end{aligned}$$

onde  $\approx$  significa “aproximadamente igual”.

Assim, a razão  $[\exp(y+k) - \exp y]/k$  é, para pequenos valores de  $k$ , aproximadamente igual a  $\exp y$ .

Mais geralmente, se considerarmos a função  $f(y) = \exp(cy)$ , onde  $c$  é uma constante, teremos, para pequenos valores de  $k$ :

$$\begin{aligned} \frac{f(y+k) - f(y)}{k} &= \frac{\exp(cy + ck) - \exp(cy)}{ck} \cdot c \\ &\approx c \cdot \exp(cy) = c \cdot f(y). \end{aligned}$$

As observações acima se traduzem, em termos matemáticos, pelas afirmações de que a derivada da função  $y = \log x$  é igual a  $1/x$  (isto é  $y' = 1/x$ ) e que a derivada da função  $x = \exp(cy)$  é  $x' = c \cdot x$ .

Daí resulta a grande importância da função exponencial (e conseqüentemente da sua inversa, a função logaritmo) para descrever as grandezas cuja taxa de variação seja, em cada momento, proporcional ao valor daquela grandeza naquele momento. Exemplos de grandezas com essa propriedade são: um capital empregado a juros compostos, uma população

(de animais ou bactérias), a radioatividade de uma substância, ou um capital que sofre desconto. Nos dois últimos exemplos, a grandeza diminui com o tempo, de modo que sua lei de variação é da forma  $x = a \cdot \exp(bt)$ , com  $a$  = valor inicial,  $t$  = tempo e  $b < 0$ .

**Resumindo:** um matemático ou astrônomo do século 17 achava os logaritmos importantes porque eles lhe permitiam efetuar cálculos com rapidez e eficiência. Um matemático de hoje acha que a função logaritmo e sua inversa, a função exponencial, ocupam uma posição central na Análise Matemática por causa de suas propriedades funcionais, muito especialmente a equação diferencial  $x' = c \cdot x$ , a qual descreve a evolução de grandezas que, em cada instante, sofrem uma variação proporcional ao seu valor naquele instante.

## 2. Números complexos

Um número complexo tem a forma  $a + ib$ , ou  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e a “unidade imaginária”  $i$  é um novo número, tal que  $i^2 = -1$ . Por isso às vezes se escreve  $i = \sqrt{-1}$ . Os números complexos surgiram em Matemática a fim de tornar possível a raiz quadrada de um número negativo. Por exemplo:  $\sqrt{-9} = 3i$ . Conseqüentemente, toda equação do segundo grau passou a ter raízes. Por exemplo  $x^2 - 2x + 5 = 0$  possui raízes complexas  $1 + 2i$  e  $1 - 2i$ .

Mais notável (e inesperado) é que, quando se acrescentou aos números reais o número  $i$ , de modo que passassem a existir as raízes  $\pm i$  da equação  $x^2 + 1 = 0$ , não foi mais necessário inventar novos números para que tivessem raízes todas as demais equações algébricas, sejam quais fossem os seus graus. Com efeito, o chamado “Teorema Fundamental da Álgebra”, cuja demonstração se deve inicialmente a Euler e d’Alembert e posteriormente, em forma definitiva, a Gauss, diz que, dado qualquer polinômio  $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ , existem números complexos  $r_1, r_2, \dots, r_n$  tais que

$$p(z) = a_0(z - r_1)(z - r_2) \dots (z - r_n).$$

Segue-se daí que  $p(r_1) = 0, p(r_2) = 0, \dots, p(r_n) = 0$ , isto é, os números complexos  $r_1, r_2, \dots, r_n$  são as raízes da equação algébrica  $p(z) = 0$ .

Assim os números complexos, introduzidos em Matemática para que tivessem raízes as equações algébricas do segundo grau, são suficientes

para dotarem de raízes as equações do terceiro, quarto, quinto, e todos os demais graus.

Este fato somente já é responsável em boa parte pela relevância matemática dos números complexos, indispensáveis em Álgebra Linear, Equações Diferenciais e em várias situações nas quais, mesmo que se desejem estudar apenas questões relativas a números reais, é indispensável considerar números complexos para se obter a solução real desejada.

Um exemplo do fenômeno acima mencionado, aliás, já havia ocorrido na Renascença, nos trabalhos dos algebristas italianos Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari, que culminaram com a descoberta das fórmulas de resolução das equações do terceiro e quarto grau.

A fórmula da equação do terceiro grau envolve raízes quadradas e cúbicas. Cardano notou que algumas equações do terceiro grau têm as 3 raízes reais mas na fórmula que as fornece ocorrem raízes quadradas de números negativos. Assim, para chegar a essas raízes reais, é preciso primeiro passar pelos números complexos. Hoje em dia já se sabe (é um teorema) que se os coeficientes de uma equação do terceiro grau são números inteiros e as 3 raízes são números reais irracionais então é impossível exprimir essas raízes por meio de fórmulas nas quais os coeficientes são submetidos a operações algébricas e radicais, sem que em algum lugar apareça a raiz quadrada de um número negativo.

Não se julgue, entretanto, que a importância dos números complexos resulta apenas do Teorema Fundamental da Álgebra. Eles se fazem presentes em praticamente todos os grandes ramos da Matemática como Álgebra, Teoria dos Números, Topologia, Geometria (Analítica, Diferencial ou Algébrica), Análise, Equações Diferenciais e em aplicações como Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, etc. A Teoria das Funções de Variável Complexa é uma área nobre, de grande tradição matemática e, ao mesmo tempo, com notável vitalidade, refletida na intensa atividade de pesquisa que se desenvolve nos dias atuais.

## 3. Trigonometria

A Trigonometria foi inventada há mais de dois mil anos. Ela consiste, essencialmente, em associar a cada ângulo  $\alpha$  certos números como  $\cos \alpha$  (o cosseno de  $\alpha$ ) e  $\sin \alpha$  (o seno de  $\alpha$ ), cada um dos quais representa, de certo modo, uma espécie de “medida” daquele ângulo. Melhor dizendo, esses números constituem um grande passo à frente nos estudos

0.334.080-1

das chamadas “relações métricas” nos triângulos porque estas, tradicionalmente, estabelecem fórmulas que relacionam entre si comprimentos de segmentos (tais como lados, alturas, bissetrizes, etc.) enquanto as funções trigonométricas relacionam ângulos com lados.

A base teórica na qual se fundamentou originalmente a Trigonometria foi a semelhança de triângulos. Dado um ângulo retângulo  $ABC$ , do qual  $\alpha = \widehat{BAC}$  seja um dos ângulos, se  $AC$  é a hipotenusa, define-se  $\cos \alpha = AB/AC$  e  $\sin \alpha = BC/AC$ . Se tivéssemos construído qualquer outro triângulo  $AB'C'$  de modo análogo, ele seria semelhante a  $ABC$  por ter um ângulo agudo comum, logo  $AB/AC = AB'/AC'$  e  $BC/AC = B'C'/AC'$ . Portanto, a semelhança de triângulos garante que as definições de  $\cos \alpha$  e  $\sin \alpha$  são coerentes, isto é, não dependem de qual tenha sido o triângulo retângulo  $ABC$  escolhido.

A relação fundamental entre  $\cos \alpha$  e  $\sin \alpha$  é a fórmula  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ . (É um costume antigo e conveniente escrever-se  $\cos^2 \alpha$  e  $\sin^2 \alpha$  em vez de  $(\cos \alpha)^2$  e  $(\sin \alpha)^2$  respectivamente.) Esta fórmula resulta imediatamente do Teorema de Pitágoras, segundo o qual  $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ .

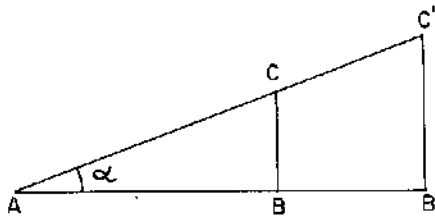


Figura 1.

Se o ângulo  $\alpha$  é obtuso (maior do que um e menor do que dois retos) considera-se seu suplemento  $\alpha'$  e põe-se, por definição,  $\cos \alpha = -\cos \alpha'$ ,  $\sin \alpha = \sin \alpha'$ .

A motivação original da Trigonometria foi o problema da “resolução de triângulos”, que consiste em determinar os 6 elementos de um triângulo (3 lados e 3 ângulos) quando se conhecem 3 deles, correspondentes aos 3 casos clássicos de congruência (3 lados, ou 2 lados mais o ângulo compreendido, ou 2 ângulos mais o lado compreendido).

O surgimento do Cálculo Infinitesimal e, posteriormente, de seu pro-

longamento teórico, a Análise Matemática, veio dar uma nova dimensão às noções básicas da Trigonometria, como seno, cosseno e às noções associadas de tangente, secante, etc. Para isso, é indispensável considerar as funções  $\cos t$  e  $\sin t$  definidas para todo número real  $t$ . Ou seja, é preciso falar em cosseno e seno de um número, em vez de um ângulo. Essa transição é feita por meio de uma função  $E$ , que chamaremos a *função de Euler*.

O domínio da função de Euler é o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. Seu contra-domínio é o círculo unitário do plano, que representaremos por  $S^1$ . Assim, a cada número real  $t$ , a função  $E$  faz corresponder um ponto  $E(t)$  do círculo  $S^1$ .

Para definir precisamente o círculo  $S^1$ , introduzimos no plano um sistema de coordenadas cartesianas, de modo que todo ponto  $z$  do plano passa a ser representado com um par ordenado  $z = (x, y)$ , onde  $x$  é a sua abscissa e  $y$  sua ordenada. Pelo Teorema de Pitágoras, a distância do ponto  $z = (x, y)$  ao ponto  $w = (u, v)$  é

$$d(z, w) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}.$$

Em particular, a distância de  $z = (x, y)$  à origem  $O = (0, 0)$  é igual a  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

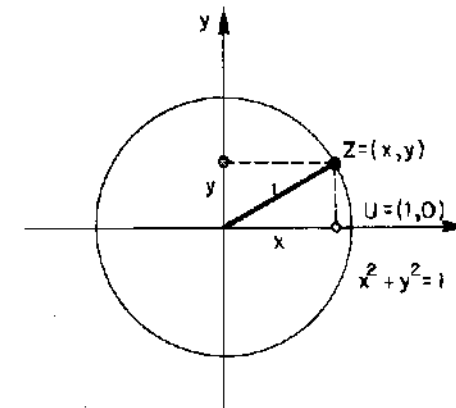


Figura 2.

O círculo unitário  $S^1$  é, por definição, o conjunto dos pontos do plano

cuja distância à origem é igual a 1. Assim, o ponto  $z = (x, y)$  pertence a  $S^1$  se, e somente se,  $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$  ou, o que é o mesmo,  $x^2 + y^2 = 1$ . Portanto, os pontos  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1/2, \sqrt{3}/2)$  e  $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  pertencem a  $S^1$ .

Note que o “círculo”  $S^1$  é, na realidade, uma circunferência. A este respeito, vide a seção “Conceitos e Controvérsias”.

Agora definiremos a função  $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ . Dado o número real  $t > 0$ , medimos no círculo  $S^1$ , a partir do ponto  $U = (1, 0)$ , um arco de comprimento  $t$ , sempre percorrendo o círculo no sentido positivo (contrário ao movimento dos ponteiros de um relógio, ou seja, o sentido que nos leva de  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$  pelo caminho mais curto em  $S^1$ ). A extremidade final deste arco é o ponto que chamaremos de  $E(t)$ . Se for  $t < 0$ ,  $E(t)$  será a extremidade final de um arco de comprimento  $t$ , medido a partir do ponto  $U = (1, 0)$ , no sentido negativo de  $S^1$  (isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio).

Observe que, como o comprimento de  $S^1$  é igual a  $2\pi$ , se tivermos  $t > 2\pi$  ou  $t < -2\pi$ , para descrevermos um arco de comprimento  $|t|$  a partir do ponto  $U = (1, 0)$  teremos de dar mais de uma volta ao longo de  $S^1$ . Em particular, se  $t = 2k\pi$ , onde  $k$  é um inteiro (positivo, negativo ou nulo), temos  $E(2k\pi) = U$ . Mais geralmente, para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ , vale  $E(t + 2k\pi) = E(t)$ , quando  $k$  é um inteiro qualquer.

A função de Euler  $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  consiste em envolver a reta  $\mathbb{R}$ , pensada como um fio inextensível, sobre o círculo  $S^1$  (imaginado como um carretel) de modo que o ponto  $0 \in \mathbb{R}$  caia sobre o ponto  $U = (1, 0) \in S^1$ .

Com auxílio da função  $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , podemos definir o cosseno e o seno de um número real  $t$ . Dado  $t \in \mathbb{R}$ , seja  $E(t) = (x, y)$ . Poremos  $\cos t = x$  e  $\sin t = y$ .

Portanto,  $x = \cos t$  é a abscissa e  $y = \sin t$  é a ordenada do ponto  $E(t)$ . Todas as propriedades de  $\cos t$  e  $\sin t$  resultam desta definição.

Quando  $0 < t < \pi$ , notamos que  $\cos t = \cos \alpha$  e  $\sin t = \sin \alpha$ , onde  $\alpha$  é o ângulo que tem o vértice na origem e cujos lados são o semi-eixo positivo das abscissas e a semi-reta que sai da origem e passa pelo ponto  $E(t)$ . Esta observação estabelece a conexão entre o cosseno e o seno de um número, por um lado, e o cosseno e o seno de um ângulo, por outro lado.

Dado um ângulo  $\alpha$ , se descrevermos uma circunferência de raio 1 tendo como centro o vértice de  $\alpha$  e chamarmos de  $t$  o comprimento do arco

que os lados de  $\alpha$  subtendem nessa circunferência, o número  $t$  chama-se a medida de  $\alpha$  em *radianos*.

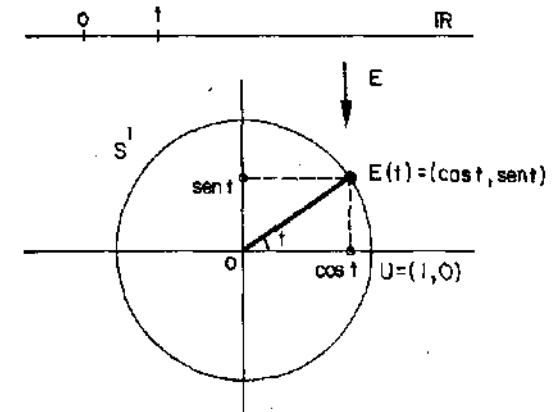


Figura 3.

Assim, um ângulo reto mede  $\pi/2$  radianos porque seus lados subtendem numa circunferência de raio 1 um arco igual à quarta parte dessa circunferência. Podemos então dizer que se  $0 < t < \pi$  então  $\cos t = \cos \alpha$ , onde  $\alpha$  é um ângulo que mede  $t$  radianos.

A função de Euler  $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , possibilitando considerar  $\cos t$  e  $\sin t$  como funções da variável real  $t$ , abriu para a Trigonometria as portas da Análise Matemática e de inúmeras aplicações importantes às Ciências Físicas.

Uma propriedade fundamental dessas funções é que elas são *periódicas*, isto é, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos  $\cos(t + 2\pi) = \cos t$  e  $\sin(t + 2\pi) = \sin t$ . Isto se exprime dizendo que  $2\pi$  é o período das funções  $\cos t$  e  $\sin t$ . (É claro, pelo que vimos acima, que qualquer outro múltiplo inteiro de  $2\pi$  é também um período para estas funções.)

Mais geralmente, dado qualquer número real  $T$ , a função  $f(t) = \sin(2\pi t/T)$  satisfaz à identidade  $f(t + T) = f(t)$ , logo é uma função periódica como período  $T$ . Portanto, usando as funções trigonométricas, podemos obter funções com qualquer período.

Ora, a periodicidade é uma circunstância presente em quase tudo que nos cerca, desde o movimento de um planeta em torno do sol, ou de um elétron ao redor do núcleo, às batidas do nosso coração. Periodicidade é

uma idéia muito próxima de oscilação (ou vibração), outro fato ubíquo, presente nas cordas de um violino que nos enleva e na corrente alternada que usamos em nossas casas. As funções periódicas são o instrumento matemático adequado para descrever todos os fenômenos periódicos.

Dado o evidente interesse que se tem por entender fatos como os acima citados, não é difícil perceber a importância enorme das funções trigonométricas na Matemática e na Física, principalmente depois que o matemático francês Joseph Fourier mostrou (em 1822), no seu consagrado estudo sobre a transmissão do calor, que toda função pode, sob hipóteses bem razoáveis, ser obtida como soma de uma série cujos termos são senos ou cossenos ("série de Fourier"). Isto foi o ponto de partida da chamada Análise de Fourier ou, mais geralmente, da Análise Harmônica, um ramo central da Matemática contemporânea.

#### 4. Síntese

Os comentários acima visam orientar o professor de Matemática do 2<sup>o</sup> grau em relação à importância, à posição científica e às possíveis aplicações de três tópicos que constam do seu programa de ensino. Espero que eles ajudem a responder a perguntas do tipo "para que serve?" e a fazer o professor sentir-se mais consciente da perspectiva histórica e do significado atual da matéria que está transmitindo a seus alunos.

Este parágrafo final, entretanto, é de natureza diferente, pois é mais diretamente ligado ao dia-a-dia do professor em suas aulas.

Mostraremos aqui como a função de Euler  $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , definida na seção 3, estabelece uma conexão entre logaritmos, números complexos e Trigonometria, efetuando uma síntese entre essas três disciplinas.

O primeiro passo nessa direção consiste em interpretar geometricamente um número complexo como um ponto do plano, em analogia com a imagem de um número real como um ponto de uma reta.

Introduzindo coordenadas cartesianas, por meio de dois eixos perpendiculares, cada ponto do plano é representado como um par ordenado  $z = (x, y)$  de números reais: sua abscissa  $x$  e sua ordenada  $y$ . Sendo o número complexo  $z = x + iy$ , em última análise, (ou em princípio) um par de números reais, é natural identificar o número complexo  $z = x + iy$  com o ponto  $z = (x, y)$  do plano cartesiano.

Feito isto, as operações de adição e multiplicação de números complexos devem possuir interpretações geométricas. Para a adição, não há difi-

culdade. Dados  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$ , a soma  $z + w = (x + u) + i(y + v)$  é o quarto vértice do paralelogramo cujos três outros vértices são a origem  $0 = 0 + i0$  e os pontos  $z, w$ .

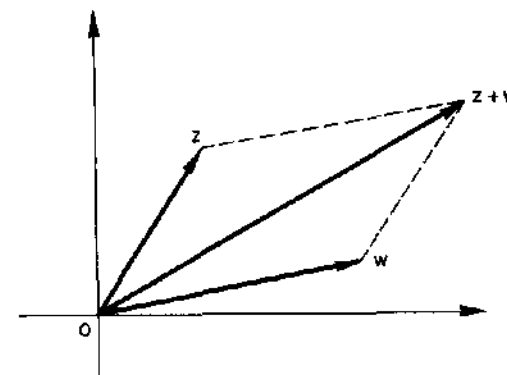


Figura 4.

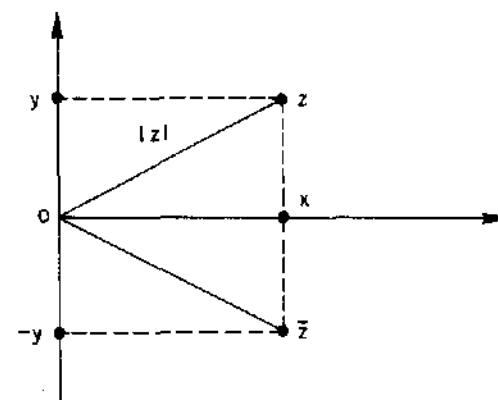


Figura 5.

Para interpretar geometricamente a multiplicação, vamos esperar um pouquinho. Antes, associemos a cada número complexo  $z = x + iy$  seu módulo  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  e seu conjugado  $\bar{z} = x - iy$ . Geometricamente, o número real não-negativo  $|z|$  é a distância do ponto  $z$  à origem, enquanto  $\bar{z}$  é o ponto simétrico de  $z$  em relação ao eixo das abscissas. Observemos que  $|z| = |\bar{z}|$  e que

$$|z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

é a distância entre os pontos  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$ .

O produto dos números complexos  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$  é definido como  $z \cdot w = (xu - yv) + i(xv + yu)$ . A multiplicação de números complexos é comutativa, associativa, distributiva em relação à adição e o número  $1 = 1 + i \cdot 0$  é seu elemento neutro, isto é,  $1 \cdot z = z$  para todo  $z$ . (Na seção 3, foi usada a notação  $U = 1 + i \cdot 0 = (1, 0)$  para indicar este número. Isto será feito novamente, quando for conveniente.) Além disso, todo número complexo  $z = x + iy \neq 0$  possui o inverso multiplicativo

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

pois  $z \cdot z^{-1} = 1$ , como se verifica, a partir da definição. Note que  $z \neq 0$  significa que  $x^2 + y^2 \neq 0$ .

O círculo unitário  $S^1$  passa a ser visto como o conjunto dos números complexos de módulo 1. Se  $z \in S^1$ , isto é,  $|z| = 1$ , então  $z^{-1} = \bar{z}$ . Ou seja, o inverso de um número complexo de módulo 1 coincide com seu conjugado. Em particular  $z \in S^1$  implica  $z^{-1} \in S^1$ .

A edição e a multiplicação de números complexos se relacionam com o módulo da seguinte maneira:  $|z + w| \leq |z| + |w|$  e  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ .

A primeira dessas relações resulta de ser o comprimento  $|z + w|$  de um lado de um triângulo inferior à soma  $|z| + |w|$  dos comprimentos dos outros dois lados. A desigualdade  $|z + w| \leq |z| + |w|$  também pode ser demonstrada aritmeticamente mas, no momento, estamos mais interessados em provar que  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ .

Sejam  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$ . Como os dois membros da igualdade proposta  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$  são não-negativos, basta provar que  $|z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$ , ou seja,  $(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$ , o que se verifica facilmente quando se efetuam as operações indicadas.

Segue-se, em particular, que se  $|z| = 1$  e  $|w| = 1$  então  $|z \cdot w| = 1$ . Assim, o círculo unitário  $S^1$  é fechado em relação às operações de multiplicação e de tomar o inverso  $z^{-1}$  de um número complexo. Isto se exprime dizendo que  $S^1$  é um grupo multiplicativo.

Outra consequência da igualdade  $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$  é que se  $c = a + ib$  tem módulo 1 então a distância  $|z - w|$  entre 2 pontos quaisquer  $z, w$  do plano é igual à distância  $|c \cdot z - c \cdot w|$  entre os pontos  $c \cdot z$  e  $c \cdot w$ . Basta notar que  $|c \cdot z - c \cdot w| = |c \cdot (z - w)| = |c| \cdot |z - w| = |z - w|$ .

Em particular, dados quaisquer números reais  $s, t$ , como  $E(t) =$

$\cos t + i \sin t$  tem módulo 1, a distância

$$|E(s) \cdot E(t) - E(t)| = |E(s) \cdot E(t) - E(t) \cdot U|$$

é igual à distância  $|E(s) - U|$ . (Lembre-se que  $U = 1 + i \cdot 0$ .) Assim o arco cujas extremidades são  $E(s) \cdot E(t), E(t)$  e o arco cujas extremidades são  $E(s), U$  subtendem cordas iguais no círculo  $S^1$ . Logo esses arcos têm o mesmo comprimento  $s$ . Conseqüentemente, o arco que vai de  $U$  a  $E(s) \cdot E(t)$  tem comprimento  $s + t$ , isto é,  $E(s) \cdot E(t) = E(s + t)$ .

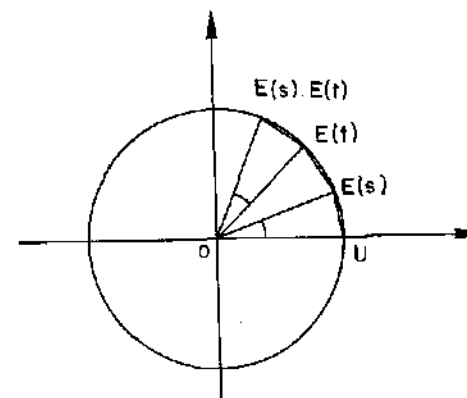


Figura 6.

A identidade  $E(s + t) = E(s) \cdot E(t)$ , que acabamos de provar, é o fato mais importante a respeito da função de Euler  $E: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ . Se escrevermos

$$E(s + t) = \cos(s + t) + i \cdot \sin(s + t),$$

$$E(s) = \cos s + i \cdot \sin s,$$

$$E(t) = \cos t + i \cdot \sin t$$

e efetuarmos a multiplicação de números complexos indicada no segundo membro, ela se torna

$$\begin{aligned} \cos(s + t) + i \cdot \sin(s + t) &= (\cos s \cdot \cos t - \sin s \cdot \sin t) + \\ &+ i \cdot (\cos s \cdot \sin t + \sin s \cdot \cos t). \end{aligned}$$

Igualando as partes reais e imaginárias dos dois membros, obtemos

as fórmulas clássicas da Trigonometria:

$$\cos(s + t) = \cos s \cdot \cos t - \operatorname{sen} s \cdot \operatorname{sen} t,$$

$$\operatorname{sen}(s + t) = \cos s \cdot \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} s \cdot \cos t.$$

Reciprocamente, se tivéssemos admitido estas fórmulas como conhecidas, delas resultaria a identidade  $E(s + t) = E(s) \cdot E(t)$ .

Esta identidade mostra que  $E(t)$  se comporta como uma potência de expoente  $t$ , o que levou Euler a propor a definição

$$e^{it} = E(t),$$

ou seja,

$$e^{it} = \cos t + i \cdot \operatorname{sen} t$$

para a potência de expoente imaginário  $it$  e, mais geralmente,

$$e^z = e^{x+iy}$$

$$= e^x \cdot e^{iy}$$

$$= e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

para a potência de base “ $e$ ” com expoente complexo  $z = x + iy$ . Estas definições estão de pleno acordo com os desenvolvimentos em série de Taylor das funções  $\operatorname{sen} x$ ,  $\cos x$  e  $e^x$ . Elas servem de base para estender a noção de logaritmo para os números negativos e mesmo para os números complexos. (Veja o item “Números negativos possuem logaritmo?”, no capítulo “Conceitos e Controvérsias”.)

A identidade  $E(s + t) = E(s) \cdot E(t)$  fornece a interpretação geométrica para a multiplicação de números complexos. Dado  $z \neq 0$  podemos escrever  $z = |z| \cdot E(s)$ , onde  $s$  é o comprimento do arco de  $S^1$  que vai desde o ponto  $U = 1 + i \cdot 0$  até a interseção de  $S^1$  com a semi-reta  $Oz$ . O número real  $s$  é chamado (um) *argumento* do número complexo  $z$ . (Outros argumentos de  $z$  são  $s + 2k\pi$ ,  $k$  inteiro.) Analogamente, se  $w \neq 0$ , podemos escrever  $w = |w| \cdot E(t)$ . Então

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot E(s) \cdot E(t)$$

$$= |z| \cdot |w| \cdot E(s + t).$$

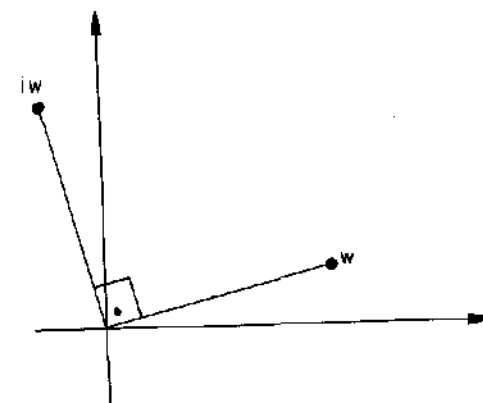


Figura 7.

Geometricamente, esta igualdade significa que  $z \cdot w$  é obtido de  $w$  multiplicando-se seu módulo por  $|z|$  e dando a  $w$  uma rotação de  $s$  radianos em torno da origem. Por exemplo, como  $i = E(\pi/2)$ , dado qualquer número complexo  $w$ , o produto  $iw$  é obtido de  $w$  por uma rotação de 90 graus no sentido positivo. (Como  $|i| = 1$ , os módulos de  $w$  e de  $iw$  são iguais.)

**Z**oroastro Azambuja Filho foi professor de Matemática no Estado e na rede particular do Rio de Janeiro. Tendo começado muito cedo, aposentou-se ainda em pleno vigor e, nos últimos anos, vive num sítio em Jacarepaguá, onde cuida da horta, de seus discos e seus livros. Mas, em vez de rocks rurais, graças a Deus, ocasionalmente nos brinda com sua agradável conversação matemática, da qual a peça sobre Malba Tahan é um exemplo. Sua inclusão nesta coletânea justifica-se tanto pela divulgação de um livro muito interessante e pelo fino perfil que traça do seu autor, como pela surpresa na conclusão, com um final contundente.

Quanto à frase final do ensaio, lamento estragar o suspense de Zoroastro. Ele é uma dessas raras pessoas que têm olhos de cores diferentes: um é verde e o outro castanho.

## Malba Tahan e as Escravas de Olhos Azuis

Na seção de livros de uma loja de departamentos, deparei-me outro dia, por acaso, com um exemplar da 27<sup>a</sup> edição de “O Homem que Calculava” de Malba Tahan. (Editora Record, Rio de Janeiro, 1983.)

Quarenta anos depois de o ter lido pela primeira vez, não resisti à tentação nostálgica de reviver antigas emoções. Comprei-o e o reli.

Para os mais jovens leitores da RPM, talvez tenha alguma utilidade dizer algumas palavras sobre esse autor e sua obra.

Malba Tahan, pseudônimo do Professor Júlio César de Mello e Souza, exerceu uma influência singular entre os estudantes da minha geração. Para os não-especialistas, em particular para a imprensa, ele foi, enquanto viveu, o maior matemático do Brasil. Esse julgamento, que pouco tinha a ver com a realidade, resultava principalmente do grande número de livros que ele escreveu (quase uma centena!), muitos deles sobre Matemática.

Eram livros de divulgação, escritos num estilo claro, simples e agradável, peculiar ao autor. Neles, a ênfase maior era dada à História da Matemática e a exposições sobre tópicos elementares, inclusive da Matemática que fora moderna no princípio deste século, com destaque para aspectos pitorescos, paradoxais, surpreendentes ou controversos.

Embora os livros de Malba Tahan tenham sido criticados por tratarem seus assuntos de forma superficial, por conterem alguns erros sérios de concepção, por serem, em grande parte, meras compilações e coletâneas de citações, é forçoso reconhecer que alguns desses livros tiveram grande aceitação, o que significa que havia no país um numeroso público, na maioria jovem, ávido por conhecer melhor a Matemática, sua história e seus desenvolvimentos. Principalmente pessoas ansiosas por ouvir alguém falar da Matemática sob forma menos árida e antipática do que seus tradicionais e severos professores, com seus igualmente áridos compêndios. Essa necessidade foi suprida, devemos admitir, com bastante sucesso, por Malba Tahan.

Olhando em retrospecto, podemos hoje achar que esse papel de propa-

gandista da Matemática deveria ter sido ocupado por alguém com melhor treinamento profissional, isto é, com mais competência científica. Alguém como Amoroso Costa, talvez. Mas Amoroso morreu cedo e, mesmo assim, em que pese sua vasta cultura, o país ainda não estava maduro para um divulgador do seu nível.

Malba Tahan surgiu na hora certa, com o nível e o estilo que minha geração queria. Se o analisarmos como matemático, estaremos olhando para o lado errado. Mas, se mudarmos o enfoque, podemos vê-lo mais adequadamente, como jornalista, divulgador, antologista e contador de histórias. Como contador de histórias, ele tem grandes momentos e “O Homem que Calculava” é o seu melhor trabalho.

Em suas 27 edições, “O Homem que Calculava” muito fez para estimular o cultivo da arte de resolver problemas, incutir o amor pela Matemática e destacar aspectos nobres e estéticos desta Ciência.

Eu era menino quando minha irmã mais velha ganhou um exemplar desse livro como presente de seu professor. Lembro-me que o devorei avidamente. E ao relê-lo agora, não obstante os muitos calos que me deixou o longo exercício do magistério, ainda senti algumas das mesmas emoções de outrora, diante de certos trechos de rara beleza.

Como toda obra, o livro tem seus pontos altos e outros nem tanto. Curiosamente, as coisas que mais me agradaram na leitura de hoje foram aquelas das quais guardava ainda alguma lembrança desde a primeira vez.

“O Homem que Calculava” é a história de Beremiz Samir, um fictício jovem persa, hábil calculista, versado na Matemática da época (século 13), contada por um amigo, admirador e companheiro de viagens, uma espécie de Dr. Watson muçulmano.

Em certas passagens, a narrativa das proezas matemáticas de Beremiz nos diferentes lugares por onde passava nos faz lembrar o Evangelho segundo São Marcos. O relato, feito por um maometano ortodoxo, é cheio de respeitadas evocações divinas e pontilhado pela linguagem pitoresca do árabe de novela. Isto é feito com graça e dá um colorido especial ao conto.

Beremiz Samir resolve problemas curiosos, alguns propostos, outros acontecidos naturalmente em suas andanças. Faz também discursos eloqüentes sobre o amor a Deus, a grandeza moral e a Matemática. E dá aulas de Matemática bastante inspiradas à filha de um cheique, com a qual vem a casar-se no fim da história.

Para que se tenha uma idéia dos problemas tratados, descrevemos o primeiro, o segundo e o último deles.

No primeiro problema, Beremiz e seu amigo, viajando sobre o mesmo camelo, chegam a um oásis, onde encontram três irmãos discutindo acaloradamente sobre como dividir uma herança de 35 camelos. Seu pai estipulara que a metade dessa herança caberia ao filho mais velho, um terço ao do meio e um nono ao mais moço.

Como 35 não é divisível por 2, nem por 3, nem por 9, eles não sabiam como efetuar a partilha.

Para espanto e preocupação do amigo, Beremiz entrega seu camelo aos 3 irmãos, a fim de facilitar a divisão. Os 36 camelos são repartidos, ficando o irmão mais velho com 18, o do meio com 12 e o mais moço com 4 camelos.

Todos ficaram contentes porque esperavam antes receber 17 e meio, 11 e dois terços e 3 e oito nonos respectivamente. E o melhor: como  $18 + 12 + 4 = 34$ , sobraram 2 camelos, a saber, o que fora emprestado e mais um. Todo mundo saiu ganhando.

Explicação: Um meio mais um terço mais um nono é igual a  $17/18$ , logo menor do que 1. Na partilha recomendada pelo velho árabe sobrava um resto, do que se aproveitaram Beremiz e seu amigo.

O segundo problema é uma pequena delícia. Beremiz e seu amigo, a caminho de Bagdá, socorrem no deserto um rico cheique, que fora assaltado, e com ele repartem irmanamente sua comida, que se resumia a 8 pães: 5 de Beremiz e 3 do amigo.

Chegados ao seu destino, o cheique os recompensa com oito moedas de ouro: 5 para Beremiz e 3 para o amigo.

Todos então se surpreendem com o suave protesto de Beremiz. Segundo este, a maneira justa de repartir as 8 moedas seria dar 7 a ele e 1 apenas ao amigo!

E prova: durante a viagem, cada refeição consistia em dividir um pão em 3 partes iguais e cada um dos viajantes comia uma delas. Foram consumidos ao todo 8 pães, ou seja, 24 terços, cada viajante comendo 8 terços. Destes, 15 terços foram dados por Beremiz, que comeu 8, logo contribuiu com 7 terços para a alimentação do cheique. Por sua vez, o amigo contribuiu com 3 pães, isto é, 9 terços, dos quais consumiu 8, logo participou apenas com 1 terço para alimentar o cheique. Isto justifica a observação de Beremiz.

No final, porém, o homem que calculava, generosamente, ficou com apenas 4 moedas, dando as 4 restantes ao amigo.

O último problema do livro se refere a 5 escravas de um poderoso califa. Três delas têm olhos azuis e nunca falam a verdade. As outras duas têm olhos negros e só dizem a verdade.

As escravas se apresentaram com os rostos cobertos por véus e Beremiz foi desafiado a determinar a cor dos olhos de cada uma, tendo o direito a fazer três perguntas, não mais do que uma pergunta a cada escrava.

Para facilitar as referências, chamaremos as 5 escravas de *A*, *B*, *C*, *D* e *E*.

Beremiz começou perguntando à escrava *A*: “Qual a cor dos seus olhos?” Para seu desespero, ela respondeu em chinês, língua que ele não entendia, por isso protestou.

Seu protesto não foi aceito, mas ficou decidido que as respostas seguintes seriam em árabe.

Em seguida, ele perguntou a *B*: “Qual foi a resposta que *A* me deu?” *B* respondeu: “Que seus olhos eram azuis”.

Finalmente, Beremiz perguntou a *C*: “Quais as cores dos olhos de *A* e *B*?” A resposta de *C* foi: “*A* tem olhos pretos e *B* tem olhos azuis”.

Neste ponto, o homem que calculava concluiu: “*A* tem olhos pretos, *B* azuis, *C* pretos, *D* azuis e *E* azuis”. Acertou e todos ficaram maravilhados.

Explicação para a dedução de Beremiz: Em primeiro lugar, se perguntarmos a qualquer das cinco escravas qual a cor dos seus olhos, sua resposta só poderá ser “Negros”, tenha ela olhos azuis ou negros, pois na primeira hipótese ela mentirá e na segunda dirá a verdade.

Logo *B* mentiu e portanto seus olhos são azuis. Como *C* disse que os olhos de *B* eram azuis, *C* falou a verdade, logo seus olhos são negros. Também porque *C* fala a verdade, os olhos de *A* são negros. Como somente duas escravas têm olhos negros, segue-se que os olhos de *D* e *E* são azuis.

Certamente Malba Tahan escolheu este caso para o fim do livro porque desejava encerrá-lo com chave de ouro, tal a beleza do problema. Podemos, entretanto, fazer três observações que reduzem bastante o brilho desse “gran finale”.

- 1) O método usado por Beremiz não permite sempre resolver o problema. Ele acertou por mero acaso. Com efeito, se os olhos de *A*

fossem azuis (admitindo ainda que  $B$  tenha olhos azuis e  $C$  negros), ele só poderia concluir que, entre  $D$  e  $E$ , uma teria olhos azuis e a outra negros. Mas não poderia dizer qual delas.

Mais precisamente: o raciocínio utilizado por Beremiz permite determinar apenas as cores dos olhos de  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Por exclusão, conclui-se que  $D$  e  $E$  têm as cores que faltam, mas não se pode especificar a cor de cada uma quando essas cores forem diferentes.

2) Se Beremiz fosse mais esperto, encontraria um método infalível para determinar a cor dos olhos de cada uma das escravas, *fazendo apenas uma única pergunta!*

Bastava chegar junto a uma das escravas (digamos,  $A$ ) e perguntar: “Qual a cor dos olhos de cada uma de vocês?”

Como há 3 escravas de olhos azuis e 2 de olhos negros, só haveria duas respostas possíveis. Se  $A$  tivesse olhos negros, sua resposta mencionaria duas escravas de olhos negros, três de olhos azuis e seria a resposta certa. Se  $A$  tivesse olhos azuis, sua resposta diria três escravas de olhos negros e duas de olhos azuis e, neste caso, bastaria inverter sua resposta para obter a verdade.

3) A solução de Beremiz e aquela dada em 2) acima fazem uso de uma informação aparentemente essencial: quantas escravas de olhos azuis e quantas de olhos negros existem no grupo.

Suponhamos agora que essa informação seja omitida. Têm-se  $n$  escravas, cujos olhos podem ser azuis ou negros. As primeiras mentem sempre, as últimas nunca. Pode haver de 0 a  $n$  escravas de olhos azuis; conseqüentemente, o número de escravas de olhos negros também não é fornecido. *Mesmo assim, ainda é possível determinar a cor dos olhos de cada uma por meio de uma única pergunta!*

Basta perguntar à escrava  $A$  o seguinte: “Se meu amigo lhe indagasse qual a cor dos olhos de cada uma das  $n$ , que lhe responderia você?”

A resposta de  $A$  para mim consistiria em atribuir a cada escrava uma cor de olhos. Pois bem, seja qual fosse a cor dos olhos de  $A$ , fosse ela mentirosa ou não, a cor dos olhos de cada escrava seria exatamente aquela dada por sua resposta a mim.

Com efeito, apenas por uma questão de método vamos supor que  $A$  começasse sua resposta pela cor dos seus próprios olhos. Haveria então duas possibilidades quanto ao começo da resposta de  $A$ .

**Primeira:** “Eu diria ao seu amigo que meus olhos são negros que os

olhos de  $B$  são... etc”. Neste caso,  $A$  não me mente, porque ela só poderia dizer ao meu amigo que seus olhos são negros. Logo seus olhos são mesmo negros e sua resposta contém a verdade.

**Segunda:** “Eu diria ao seu amigo que meus olhos são azuis, que os de  $B$  são... etc”. Então  $A$  é mentirosa, pois ela não poderia dizer a ninguém que seus próprios olhos são azuis. Portanto  $A$  mentiria ao meu amigo e me diria o contrário, logo me contaria a verdade.

Apesar de ter estragado um pouco da festa de Beremiz com as escravas, espero ter deixado claro que me diverti lendo “O Homem que Calculava”, tanto agora como da primeira vez. A solução 2) foi por mim imaginada naquela época, embora as pessoas que me conhecem ou que sabem a cor dos meus olhos, duvidem muito desta afirmação.

O hibridismo do seu nome pode ter sido uma coincidência ou não, mas a verdade é que, por algum tempo, Euclides Rosa hesitou entre ser um escritor como o João Guimarães ou um professor de Matemática como o de Alexandria ou (mais modestamente) como o Roxo. O acaso apressou a decisão. Seu primeiro emprego foi como professor de Inglês mas, logo em seguida, o professor de Matemática do colégio onde ensinava passou num concurso para o Banco do Brasil e largou todas as turmas. Euclides aproveitou a oportunidade e até hoje trabalha no mesmo lugar. De vez em quando, porém, tem uma recatada e, num compromisso inevitável, faz-se escritor de Matemática.

Sua crônica sobre o Teorema de Pitágoras é, na realidade, a resenha de um livro, escrito por um professor americano do começo do século, que teve a paciência de colecionar centenas de demonstrações do referido teorema mas não teve o discernimento para notar que a maioria delas são variações triviais umas das outras.

Euclides Rosa soube extrair do livro e nos dar de bandeja os aspectos mais interessantes e curiosos que ele contém, acrescentar suas próprias observações e críticas (às vezes irônicas, como aquela sobre a fórmula  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ), e culminar com a bela demonstração de Polya. Tudo isto numa prosa capaz de agradar a Monsieur Jourdain.

O Teorema de Pitágoras é, de fato, uma proposição de importância crucial na Matemática e merece todo o destaque que a ele se possa dar. Seus aficcionados não precisam, entretanto, dar-se ao trabalho de ler o livro do Professor Loomis nem lamentarem não tê-lo achado. O essencial está aqui adiante. A esses aficcionados, Euclides me pede que proponha a seguinte versão tri-dimensional do teorema: "O quadrado da área de um polígono plano qualquer, situado no espaço, é igual à soma dos quadrados das áreas de suas projeções sobre três planos mutuamente ortogonais".

## Mania de Pitágoras

Elisha Scott Loomis, professor de Matemática em Cleveland, Ohio (Estados Unidos) era realmente um apaixonado pelo Teorema de Pitágoras. Durante 20 anos, de 1907 a 1927, colecionou demonstrações desse teorema, agrupou-as e as organizou num livro, ao qual chamou "The Pythagorean Proposition". (A Proposição de Pitágoras.) A primeira edição, em 1927, continha 230 demonstrações. Na segunda edição, publicada em 1940, este número foi aumentado para 370 demonstrações. Depois do falecimento do autor, o livro foi reimpresso, em 1968 e 1972, pelo "National Council of Teachers of Mathematics" daquele país.

O Professor Loomis classifica as demonstrações do Teorema de Pitágoras em basicamente dois tipos: provas "algébricas" (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos) e provas "geométricas" (baseadas em comparações de áreas). Ele se dá ao trabalho de observar que não é possível provar o Teorema de Pitágoras com argumentos trigonométricos porque a igualdade fundamental da Trigonometria,  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , já é um caso particular daquele teorema.

Como sabemos, o enunciado do Teorema de Pitágoras é o seguinte: "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos".

Se  $a, b$  são as medidas dos catetos e  $c$  é a medida da hipotenusa, o enunciado acima equivale a afirmar que  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Documentos históricos mostram que os egípcios e os babilônios, muito antes dos gregos, conheciam casos particulares desse teorema, expressos em relações como

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

e

$$1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2.$$

O fato de que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo era (e ainda

é) útil aos agrimensores. Há também um manuscrito chinês, datando de mais de mil anos antes de Cristo, onde se encontra a seguinte afirmação: "Tome o quadrado do primeiro lado e o quadrado do segundo e os some; a raiz quadrada dessa soma é a hipotenusa". Outros documentos antigos mostram que na Índia, bem antes da era Cristã, sabia-se que os triângulos de lados 3, 4, 5 ou 5, 12, 13, ou 12, 35, 37 são retângulos.

O que parece certo, todavia, é que nenhum desses povos sabia demonstrar o teorema. Tudo indica que Pitágoras foi o primeiro a prová-lo. (Ou alguém da sua Escola o fez, o que dá no mesmo, pois o conhecimento científico naquele grupo era propriedade comum.)

### 1. A mais bela prova

Qual foi a demonstração dada por Pitágoras? Não se sabe ao certo, pois ele não deixou trabalhos escritos. A maioria dos historiadores acredita que foi uma demonstração do tipo "geométrico", isto é, baseada na comparação de áreas. Não foi a que se encontra nos "Elementos" de Euclides, e que é ainda hoje muito encontrada nos livros de Geometria, pois tal demonstração parece ter sido concebida pelo próprio Euclides. A demonstração de Pitágoras pode muito bem ter sido a que decorre das figuras abaixo.

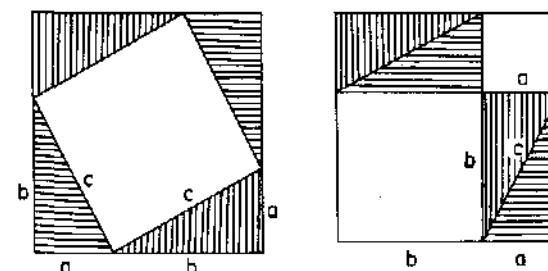


Figura 1.

Do quadrado que tem  $a + b$  como lado, retiremos 4 triângulos iguais ao dado. Se fizermos isto como na figura à esquerda, obteremos um quadrado de lado  $c$ . Mas se a mesma operação for feita como na figura à direita, restarão dois quadrados, de lados  $a$  e  $b$  respectivamente. Logo, a área do quadrado de lado  $c$  é a soma das áreas dos quadrados cujos lados medem  $a$  e  $b$ .

Esta é, provavelmente, a mais bela demonstração do Teorema de Pitágoras. Entretanto, no livro de Loomis ela aparece sem maior destaque, como variante de uma das provas dadas, não sendo sequer contada entre as 370 numeradas.

Apresentamos a seguir algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, que têm algum interesse especial, por um motivo ou por outro. As quatro primeiras constam da lista do Professor Loomis.

## 2. A prova mais curta

É também a mais conhecida. Baseia-se na seguinte consequência da semelhança de triângulos retângulos: “Num triângulo retângulo, cada cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela”. Assim, se  $m$  e  $n$  são respectivamente as projeções dos catetos  $a$  e  $b$  sobre a hipotenusa  $c$ , temos  $a^2 = mc$ ,  $b^2 = nc$ , enquanto  $m+n = c$ . Somando, vem  $a^2 + b^2 = c^2$ .

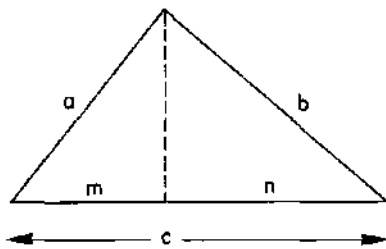


Figura 2.

## 3. A demonstração do presidente

James Abram Garfield, presidente dos Estados Unidos durante apenas 4 meses (pois foi assassinado em 1881) era também general e também gostava de Matemática. Ele deu uma prova do Teorema de Pitágoras baseada na figura 3.

A área do trapézio com bases  $a$ ,  $b$  e altura  $a+b$  é igual à semi-soma das bases vezes a altura. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de 3 triângulos retângulos. Portanto

$$\frac{a+b}{2} \times (a+b) = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}.$$

Simplificando, obtemos  $a^2 + b^2 = c^2$ .

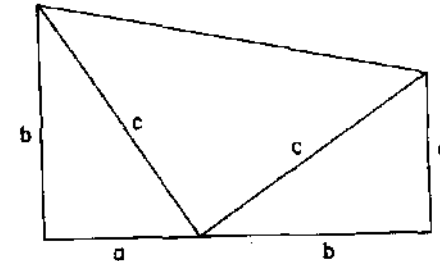


Figura 3.

## 4. A demonstração de Leonardo da Vinci

O grande gênio criador da Mona Lisa também concebeu uma demonstração do Teorema de Pitágoras, que se baseia na figura 4.

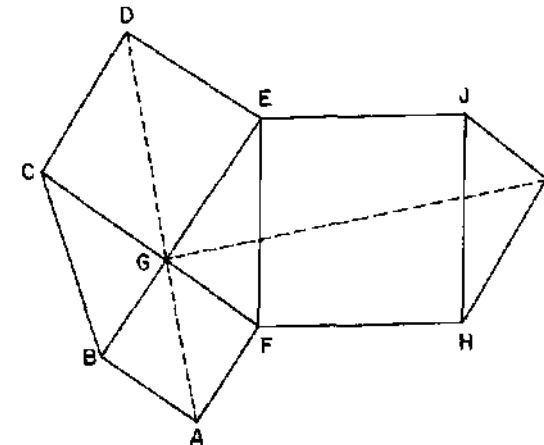


Figura 4.

Os quadriláteros  $ABCD$ ,  $DEFA$ ,  $GFHI$  e  $GEJI$  são congruentes. Logo os hexágonos  $ABCDEF$  e  $GEJIHF$  têm a mesma área. Daí resulta que a área do quadrado  $FEJH$  é a soma das áreas dos quadrados  $ABGF$  e  $CDEG$ .

## 5. A demonstração de Pappus

Na realidade, não se trata apenas de uma nova demonstração mas de uma generalização bastante interessante do Teorema de Pitágoras. Em vez de um triângulo retângulo, toma-se um triângulo arbitrário  $ABC$ ; em vez de quadrados sobre os lados, tomam-se paralelogramos, sendo dois deles quaisquer, exigindo-se que o terceiro cumpra a condição de  $CD$  ser paralelo a  $HA$ , e com o mesmo comprimento.

O teorema de Pappus afirma que a área do paralelogramo  $BCDE$  é a soma das áreas de  $ABFG$  e  $AIJC$ . A demonstração se baseia na simples observação de que dois paralelogramos com bases e alturas de mesmo comprimento têm a mesma área.

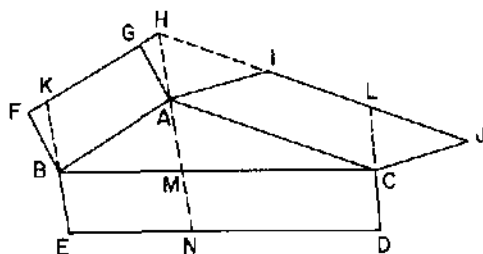


Figura 5.

Assim, por um lado,  $AHKB$  tem a mesma área que  $ABFG$  e por outro lado, a mesma área que  $BMNE$ . Segue-se que as áreas de  $BMNE$  e  $ABFG$  são iguais. Analogamente, são iguais as áreas de  $CDNM$  e  $CAIJ$ . Portanto, a área de  $BCDE$  é a soma das áreas de  $ABFG$  e  $CAIJ$ .

O Teorema de Pitágoras é caso particular do de Pappus. Basta tomar o triângulo  $ABC$  retângulo e três quadrados em lugar dos três paralelogramos.

## 6. O argumento de Polya

No meu entender, entretanto, a demonstração mais inteligente do Teorema de Pitágoras não está incluída entre as 370 colecionadas pelo Professor Loomis. Ela se acha no livro "Induction and Analogy in Mathematics", de autoria do matemático húngaro George Polya.

O raciocínio de Polya se baseia na conhecida proposição, segundo a qual "as áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança".

Lembremos que duas figuras  $F$  e  $F'$  dizem-se *semelhantes* quando a cada ponto  $A$  da figura  $F$  corresponde um ponto  $A'$  em  $F'$ , chamado o seu *homólogo*, de tal maneira que se  $A, B$  são pontos quaisquer de  $F$  e  $A', B'$  são seus homólogos em  $F'$  então a razão  $A'B'/AB$  é uma constante  $k$ , chamada a *razão de semelhança* de  $F$  para  $F'$ . Por exemplo, dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos de um deles são congruentes aos ângulos do outro. Por outro lado, dois quadrados quaisquer, um de lado  $\ell$  e outro de lado  $\ell'$ , são semelhantes e a razão de semelhança do primeiro para o segundo é  $k = \ell'/\ell$ .

Em vez do Teorema de Pitágoras, Polya procura provar a seguinte proposição mais geral (que, diga-se de passagem, já se acha nos "Elementos" de Euclides):

Se  $F, F'$  e  $F''$  são figuras semelhantes, construídas respectivamente sobre a hipotenusa  $c$  e sobre os catetos  $a, b$  de um triângulo retângulo então a área de  $F$  é igual à soma das áreas de  $F'$  e  $F''$ .

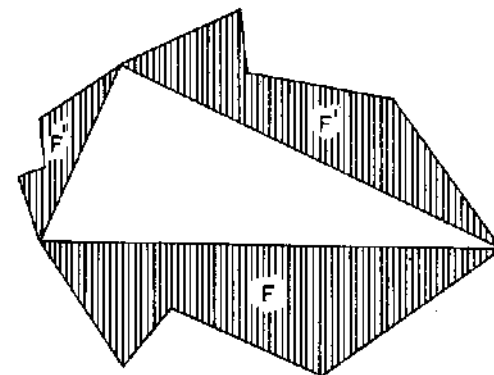


Figura 6.

O enunciado acima implica que a razão de semelhança de  $F'$  para  $F$  é  $b/a$ , de  $F''$  para  $F$  é  $c/a$  e de  $F''$  para  $F$  é  $c/b$ .

Por simplicidade, escrevamos  $F$  em vez de "área de  $F$ ",  $G$  em vez de "área de  $G$ ", etc.

Se  $G, G', G''$  são outras figuras semelhantes construídas sobre a hi-

potenusa e os catetos, respectivamente, em virtude da proposição acima enunciada, teremos:

$$\frac{G'}{G''} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{F'}{F''},$$

logo

$$\frac{G'}{F'} = \frac{G''}{F''}.$$

De modo análogo teremos

$$\frac{G'}{F'} = \frac{G}{F}.$$

Portanto  $G/F = G'/F' = G''/F'' = \alpha$ , digamos. Escrevendo de outro modo:  $G = \alpha \cdot F$ ,  $G' = \alpha \cdot F'$  e  $G'' = \alpha \cdot F''$ .

Que significam estas 3 últimas igualdades? Elas querem dizer que, se conseguirmos achar 3 figuras semelhantes especiais  $F$ ,  $F'$  e  $F''$ , construídas sobre a hipotenusa e os catetos do nosso triângulo, de tal maneira que se tenha  $F = F' + F''$  então teremos também  $G = G' + G''$  sejam quais forem as figuras semelhantes  $G$ ,  $G'$  e  $G''$  construídas do mesmo modo. Com efeito, teremos  $G = \alpha \cdot F$ ,  $G' = \alpha \cdot F'$  e  $G'' = \alpha \cdot F''$ , logo  $G' + G'' = \alpha \cdot F' + \alpha \cdot F'' = \alpha(F' + F'') = \alpha \cdot F = G$ .

Agora é só procurar as figuras especiais. Mas elas estão facilmente ao nosso alcance. Dado o triângulo retângulo  $ABC$ , tracemos a altura  $CD$ , baixada do vértice do ângulo reto  $C$  sobre a hipotenusa  $AB$ .

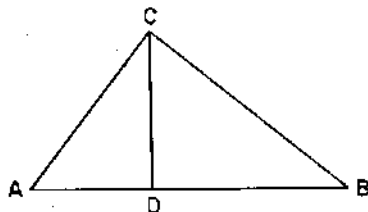


Figura 7.

A figura  $F$  será o próprio triângulo  $ABC$ . Para  $F'$  escolheremos  $ADC$  e faremos  $F'' = BCD$ . Evidentemente,  $F$ ,  $F'$  e  $F''$  são figuras semelhantes. Mais evidentemente ainda, temos  $F = F' + F''$ .

**P**or dois pontos distintos passa uma, e somente uma, linha reta. Este é um dos postulados fundamentais da Geometria Euclidiana. Traçar a reta que une dois pontos é uma das duas operações básicas do Desenho Geométrico. (A outra é traçar o círculo com raio dado e centro num ponto dado.) Em problemas geométricos, uma reta é considerada como inteiramente determinada, desde que se conheçam dois de seus pontos.

Na prática, a situação pode ser diferente. Num plano (para simplificar), suponhamos dados dois pontos  $A$  e  $B$ . Como traçar a reta que os une se o único instrumento ao nosso dispor é uma régua cujo comprimento é menor do que a distância do ponto  $A$  ao ponto  $B$ ?

Isto ilustra um aspecto da diferença entre Matemática Pura e Matemática Aplicada.

No problema considerado a seguir, há uma montanha entre os pontos  $A$  e  $B$ , o que impede até mesmo fazer mira de um ponto ao outro, ou esticar um fio.

Mesmo assim, o problema foi resolvido. Com auxílio da Geometria Euclidiana, naturalmente. Depois de ler a narrativa, teremos aprendido como, usando uma régua pequenina, traçar uma reta ligando dois pontos muito afastados.

## Como Abrir um Túnel, se Você Sabe Geometria

A ilha de Samos, que ainda pertence à Grécia, fica a menos de 2 quilômetros da costa da Turquia. Há 2 500 anos, toda aquela região era habitada por gregos. Samos passou à História por ser a terra natal de Pitágoras, mas não é dele que vamos falar.

O herói do nosso episódio nem ao menos era matemático. Seu nome era Eupalinos e, nos dias atuais, seria chamado de engenheiro. Ele será focalizado aqui por ter sabido usar, com bastante sucesso, um fato elementar de Geometria Plana para resolver um problema de Engenharia e assim contribuir para o bem-estar de uma comunidade.

O exemplo de Eupalinos merece ser conhecido por dois motivos: fornece um tópico interessante para ilustrar nossas aulas e mostra como o conhecimento matemático, mesmo quando de natureza teórica, pode ter influência decisiva no progresso tecnológico.

O teorema de Geometria usado por Eupalinos foi o seguinte: *Se dois triângulos retângulos têm catetos proporcionais, seus ângulos agudos são iguais.*

Na figura a seguir, se  $b/c = b'/c'$  então  $\angle ab = \angle a'b'$  e  $\angle ac = \angle a'c'$ .

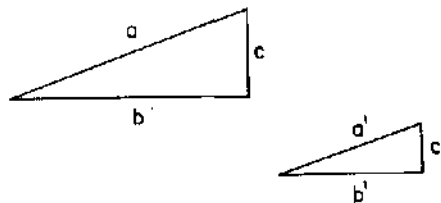


Figura 1.

Como se sabe, este é um caso particular de semelhança de triângulos. (Os triângulos dados têm um ângulo (reto) igual, compreendido entre lados proporcionais.)

Para sermos exatos, Eupalinos não usou precisamente o teorema acima e sim uma sua consequência imediata, que enunciaremos agora:

*Sejam  $abc$  e  $a'b'c'$  triângulos retângulos com um vértice comum. Se os catetos  $b$  e  $c'$  são perpendiculares e, além disso, tem-se  $b/c = b'/c'$  então as hipotenusas  $a$  e  $a'$  estão em linha reta.*

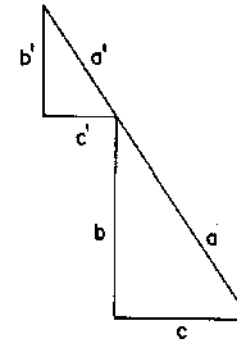


Figura 2.

A afirmação acima decorre imediatamente da anterior pois a soma dos ângulos em torno do vértice comum aos dois triângulos é igual a dois ângulos retos.

Retomemos nossa história. Ela se passa em Samos, ano 530 a.C. O poderoso tirano Polícrates se preocupava com o abastecimento de água da cidade. Havia fontes abundantes na ilha, mas ficavam do outro lado do monte Castro; o acesso a elas era muito difícil para os habitantes da cidade.

Decidiu-se abrir um túnel.

A melhor entrada e a mais conveniente saída do túnel foram escolhidas pelos assessores de Polícrates. Eram dois pontos, que chamaremos de  $A$  e  $B$  respectivamente.

Cavar a montanha não seria árduo, pois a rocha era calcárea e não faltavam operários experientes. O problema era achar um modo de sair do ponto  $A$  e, cavando, chegar ao ponto  $B$  sem se perder no caminho.

Eupalinos, encarregado de estudar a questão, surpreendeu a todos com uma solução simples e prática.

Além disso, anunciou que reduziria o tempo de trabalho à metade propondo que se iniciasse a obra em duas frentes, começando a cavar

simultaneamente nos pontos  $A$  e  $B$ , encontrando-se as duas turmas no meio do túnel!

Disse e fez. O túnel, construído há 25 séculos, é mencionado pelo historiador grego Herodoto.

Em 1882, arqueólogos alemães, escavando na ilha de Samos, o encontraram. Ele tem um quilômetro de extensão, sua seção transversal é um quadrado com 2 metros de lado, com uma vala funda para os canos d'água e aberturas no teto para renovação do ar e limpeza de detritos.

Mas como Eupalinos conseguiu, partindo simultaneamente de  $A$  e  $B$ , traçar uma reta ligando esses pontos, através da montanha?

Na figura a seguir, o contorno curvilíneo representa o monte,  $A$  é o ponto de entrada e  $B$  é a saída do túnel.

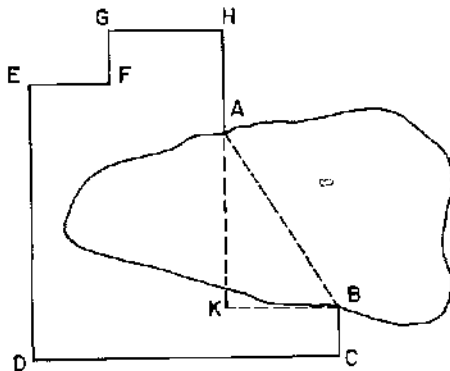


Figura 3.

A partir do ponto  $B$  fixa-se uma direção arbitrária  $BC$  e, caminhando ao longo de uma poligonal  $BCDEFGHA$ , na qual cada lado forma um ângulo reto com o seguinte, atinge-se o ponto  $A$ , tendo evitado assim as áreas mais escarpadas da montanha. (Não é difícil imaginar um instrumento ótico rudimentar que permita dar com precisão esses giros de 90 graus.)

Anotando-se o comprimento de cada um dos lados da poligonal, determinam-se facilmente os comprimentos dos catetos  $AK$  e  $KB$  do triângulo retângulo  $AKB$  no qual  $AB$  é a hipotenusa e os catetos têm as direções dos lados da poligonal considerada.

Calcula-se então a razão  $r = AK/KB$ . A partir dos pontos  $A$  e

$B$ , constróem-se dois pequenos triângulos retângulos cujos catetos ainda tenham as direções dos lados da poligonal e, além disso, em cada um desses triângulos, a razão entre os catetos seja igual à razão  $r$  entre os catetos do triângulo  $AKB$ :

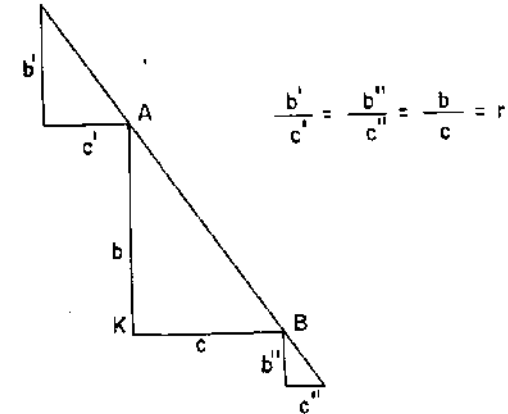


Figura 4.

Agora é só cavar o morro, a partir dos pontos  $A$  e  $B$ , na direção das hipotenusas dos triângulos pequenos.

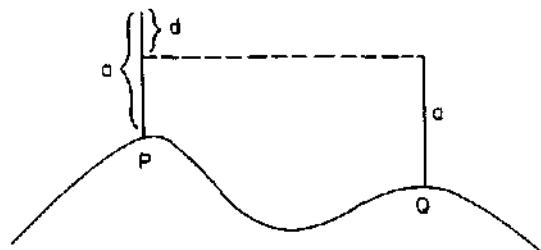
Isto resolve o problema se os pontos  $A$  e  $B$  estiverem no mesmo nível: cava-se sempre na horizontal e o plano horizontal é fácil de determinar, por meio de vasos comunicantes ou por outros processos.

Em geral,  $A$  e  $B$  não estão no mesmo nível. No caso em questão, é obviamente desejável que  $B$  seja mais baixo e sem dúvida levou-se isto em conta na sua escolha como ponto de saída. Mas é fácil calcular  $d$  = diferença de nível entre  $A$  e  $B$ . Basta ir registrando, à medida que se percorre a poligonal  $BCDEFGHA$ , a diferença de nível entre cada vértice e o seguinte.

Tendo  $d$ , consideramos o triângulo retângulo  $AMB$ , no qual o cateto  $AM$  é vertical e tem comprimento  $d$ . O comprimento da hipotenusa  $AB$  se determina pelo teorema de Pitágoras (a partir dos catetos do triângulo  $AKB$ ).

A razão  $AM/AB = s$  diz como se deve controlar a inclinação da escavação: cada vez que andarmos uma unidade de comprimento ao longo

do túnel, o nível deve baixar  $s$  unidades.



$d$  = diferença de nível entre os pontos P e Q

Figura 5.

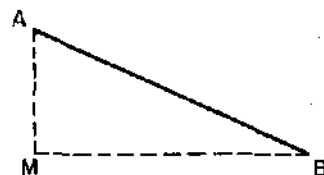


Figura 6.

O mais notável desse raciocínio teórico é que ele foi posto em prática e funcionou. O túnel sob o monte Castro lá está, para quem quiser ver, na majestade dos seus dois mil e quinhentos anos de idade.

Honestamente, devemos esclarecer que as duas extremidades das escavações não se encontraram exatamente no mesmo ponto. Isto seria esperar demais da precisão dos instrumentos então existentes.

Houve um erro de uns 9 metros na horizontal e 3 metros na vertical. Desvio insignificante, convenhamos. Além disso, esse erro tem dois aspectos interessantes.

Em primeiro lugar, constitui uma prova de que o túnel foi realmente cavado em duas frentes.

Em segundo lugar, a ponta que começou em  $B$  chegou mais baixa do que a que começou em  $A$ , o que permitiu formar uma pequena cachoeira, sem interromper o fluxo de água de  $A$  para  $B$ .

Isto nos deixa quase certos de que esse erro na vertical está ligado ao cuidado dos construtores em não deixar as pontas se encontrarem com a saída mais alta do que a entrada, o que causaria um problema desagradável.

Para encerrar, uma pergunta: como sabemos destas coisas? Eupalinos não deixou obras escritas. Mas Heron de Alexandria publicou muitos livros, alguns deles ainda hoje existentes. Um desses livros é sobre um instrumento de agrimensura chamado dioptra. Nele, Heron descreve o processo que expusemos acima.

Em seu todo, os livros escritos por Heron formam uma enciclopédia de métodos e técnicas de Matemática Aplicada, sintetizando o conhecimento da época.

Outros livros, talvez menos completos, certamente foram publicados antes com propósitos semelhantes e não se pode deixar de supor que a construção de Eupalinos tenha figurado entre essas técnicas.

## Referências

1. Fernando Trotta, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic, "Matemática Aplicada".

Uma discussão do problema do túnel usando Trigonometria, bem como uma breve apresentação do método por nós exposto. De um modo geral, os 3 volumes de Trotta, Imenes e Jakubovic são altamente recomendáveis pela abundância de exemplos e aplicações de Matemática a nível de estudantes do segundo grau, Editora Moderna, S. Paulo, 1979, pp. 193–196.

2. Hans Freudenthal, "Perspectivas da Matemática".

Uma série de tópicos independentes, que podem servir de inspiração e fonte de informação aos interessados por Matemática. O problema do túnel é um dos primeiros abordados nesse livro, Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1985.

3. B.L. van der Waerden, "Science Awakening".

Uma exposição clara e acessível dos primórdios da Ciência no mundo ocidental, começando com sumérios e babilônios, indo até os gregos. O primeiro texto moderno a contar a história de Eupalinos, Noordhoff, 1954.

**T**odo mundo sabe que, para poder demonstrar um teorema, é, necessário em primeiro lugar que todos os conceitos mencionados no enunciado tenham sido previamente definidos (ou façam parte de uma relação explícita de elementos primitivos, aceitos sem definição) e, em segundo lugar, que sejam declaradas explicitamente as hipóteses ou condições que tais conceitos devem cumprir.

Por exemplo, no Teorema de Pitágoras os conceitos são área, quadrado e triângulo. A hipótese é que o triângulo dado é retângulo.

Seria inconcebível pretender provar que  $a^2 = b^2 + c^2$  sem definir antes o que é um triângulo e (pior ainda) sem supor explicitamente que os lados  $b$  e  $c$  são perpendiculares. Mesmo porque a igualdade acima seria falsa sem esta hipótese.

As afirmações acima feitas são óbvias e elementares.

No entanto, um dos teoremas mais conhecidos da Matemática foi demonstrado, por dois dos mais notáveis matemáticos que já existiram, sem que nenhum dos cuidados acima fosse observado. Não é de admirar que existam contra-exemplos para esse teorema.

Como assim? Contra-exemplos para um teorema?

No artigo seguinte é contada a história desde o princípio, a partir do ponto em que Euler estabelece a relação  $V - A + F = 2$  para qualquer poliedro, sem dizer o que significa esta palavra. Não se trata de justificar os argumentos de Euler, o que ninguém jamais conseguiu. A missão é aproveitar a elegante demonstração de Cauchy, definindo precisamente o conceito de poliedro e tornando explícitas todas as hipóteses necessárias para que tal demonstração seja válida.

Ao final, uma surpresa: as condições que se precisam impor ao poliedro para que os argumentos de Cauchy sejam corretos constituem uma caracterização topológica da esfera em termos combinatórios. Noutras palavras, um poliedro satisfaz tais condições se, e somente se, é homeomorfo a uma esfera.

Esse artigo foi publicado inicialmente no "Noticiário da Sociedade Brasileira de Matemática", ano XII, nº 2, outubro de 1982 e depois, sob a presente forma, na revista "Matemática Universitária" nº 2.

# O Teorema de Euler sobre Poliedros

## 1. Introdução

Este ensaio foi motivado pela leitura de Lakatos 1976, onde o Teorema de Euler é usado como tema de fundo, sobre o qual o autor expõe suas idéias a respeito das provas matemáticas. O ponto de partida daquele livro é a demonstração dada por Cauchy para o referido teorema. Embora o trabalho de Lakatos goze de merecida reputação como obra de Filosofia Matemática e contenha uma crônica minuciosa sobre a trajetória histórica do Teorema de Euler, ele de certo modo frustra a curiosidade do leitor ao deixar inacabada a análise crítica da demonstração de Cauchy. Essa análise é completada aqui. O título deste artigo bem poderia ser "Dada uma demonstração, achar o teorema que ela prova".

Nosso interesse por este assunto foi também estimulado pelo fato de que no colégio estudamos o Teorema de Euler (com a demonstração de Cauchy) e depois a vimos reproduzida por autores conceituados, como Hilbert-Cohn Vossen e Courant-Robbins numa forma aparentemente compatível com o nível do curso secundário. O presente estudo torna explícitas as condições que precisam ser admitidas a fim de que a demonstração de Cauchy seja válida e mostra que a hipótese feita por Hilbert-Cohn Vossen e Courant-Robbins (de que o poliedro é homeomorfo a uma esfera) só permite a utilização da prova de Cauchy mediante recursos e técnicas avançadas, não mencionadas por aqueles autores.

No caso particular de poliedros convexos, há demonstrações elementares e corretas do Teorema de Euler. A primeira, e mais elegante delas, foi obtida por A.M. Legendre (veja Legendre [1846]) com base na fórmula de Girard para a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. (Veja também E. Lima [1984].) Ainda no caso de poliedros convexos, a demonstração de Legendre pode ser adaptada de modo a evitar a Geometria Esférica, tornando-se mais elementar. (Cfr. Z. Azambuja [1983].)

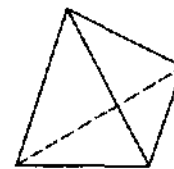
## 2. Resumo histórico

O Teorema de Euler, descoberto em 1758, diz que se um poliedro tem  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces então  $V - A + F = 2$ .

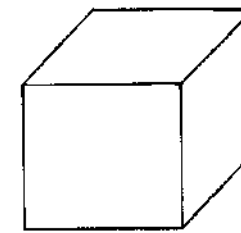
Há um manuscrito de Descartes, produzido por volta de 1639 e encontrado por Leibniz em 1675, que contém resultados a partir dos quais se poderia obter a fórmula acima como consequência imediata. Mas Descartes não parece ter notado isso. O navio que trouxe para a França os pertences de Descartes, depois de sua morte em Estocolmo, naufragou no rio Sena. O baú que continha o manuscrito flutuou e foi encontrado no dia seguinte. A cópia feita por Leibniz também se perdeu, sendo reencontrada em 1860. Para um estudo detalhado do manuscrito de Descartes, veja P. Federico [1982].

A demonstração mais divulgada desse teorema no caso de poliedros homeomorfos à esfera é basicamente devida a Cauchy [1813]. Ela pode ser encontrada, por exemplo, em Courant-Robbins [1951] e Hilbert-Cohn Vossen [1956].

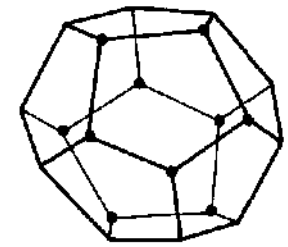
O Teorema de Euler tem sido ensinado, há décadas, em cursos de Geometria nas escolas secundárias. Ele tem as características usuais que tornam um teorema atraente e popular: generalidade de validade, simplicidade de enunciado, demonstração elegante e inteligível. Além disso, é fácil ilustrá-lo com belos desenhos de poliedros, nos quais se constata visualmente que  $V - A + F = 2$ .



TETRAEDRO  
 $V - A + F = 4 - 6 + 4 = 2$



CUBO  
 $V - A + F = 8 - 12 + 6 = 2$



DODECAEDRO  
 $V - A + F = 20 - 30 + 12 = 2$

Figura 1.

No entanto, o Teorema de Euler não é válido com toda a generalidade

do enunciado que demos (o mesmo de Euler, que o suponha verdadeiro para todos os poliedros). Muito provavelmente Euler (o qual nunca se deu ao trabalho de definir precisamente “poliedro”) não considerava como poliedros os sólidos, como o da figura 2, para os quais seu teorema é falso.

Há muito tempo se conhecem exemplos de poliedros para os quais  $V - A + F \neq 2$ . A figura 2, a seguir, exibe um poliedro no qual se tem  $V - A + F = 16 - 32 + 16 = 0$ .

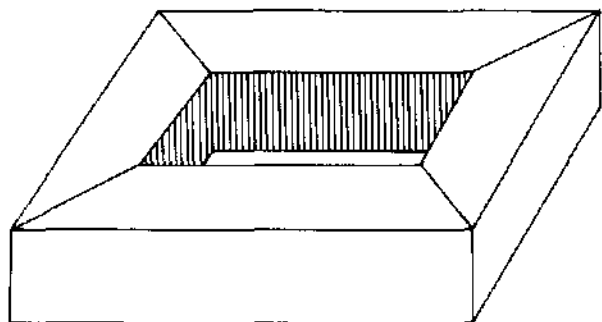


Figura 2.

Várias gerações de geômetras depois de Euler se preocuparam com o problema de estabelecer a relação  $V - A + F = 2$  como um verdadeiro teorema, livre dos contra-exemplos embaraçosos.

Uma saída óbvia consiste em restringir a classe dos poliedros aos quais ele se aplica. Alguns autores se limitam a poliedros convexos, isto é, poliedros situados do mesmo lado de qualquer plano que contenha uma de suas faces. Os poliedros da figura 1 são convexos, mas o da figura 2 não é.

É verdade que todo poliedro convexo satisfaz à relação de Euler mas é fácil achar exemplos de poliedros não convexos para os quais ela ainda vale. A figura 3 abaixo mostra um desses exemplos: um prisma no qual a base foi substituída pelas faces superiores de uma pirâmide.

A controvérsia em torno do Teorema de Euler perdurou durante mais de um século. Sua história está contida nas notas de rodapé do livro de Lakatos [1976]. A solução definitiva do problema deve-se à Poincaré

[1893], primeiro matemático a compreender que o Teorema de Euler é um teorema de Topologia, e não de Geometria, ao notar que o número  $V - A + F$  é um *invariante topológico* do poliedro  $P$ .

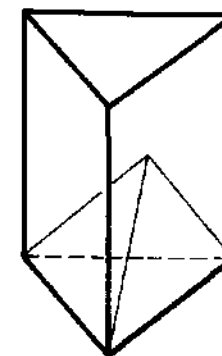


Figura 3.

Que significa esta última afirmação?

Para explicar, precisamos dar uma definição. Dizemos que duas figuras  $P$  e  $Q$  são *homeomorfas* quando existe uma transformação contínua  $f: P \rightarrow Q$  cuja inversa  $f^{-1}: Q \rightarrow P$  também é contínua. (Neste caso,  $f$  chama-se um *homeomorfismo* de  $P$  sobre  $Q$ .) Por exemplo, se imaginarmos cada poliedro feito de borracha e os inflarmos, injetando ar, os poliedros das figuras 1 e 3 serão transformados em esferas e o da figura 2 se tornará um toro (câmara de ar de um pneu). Assim, os poliedros das figuras 1 e 3 são homeomorfos a esferas e o da figura 2 é homeomorfo a um toro.

Poincaré mostrou que se o poliedro  $P$ , com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces, é homeomorfo ao poliedro  $P'$ , com  $V'$  vértices,  $A'$  arestas e  $F'$  faces então  $V, A, F$  podem ser (e em geral são) diferentes de  $V', A', F'$  respectivamente, mas  $V - A + F = V' - A' + F'$ .

É costume hoje em dia escrever  $\chi(P) = V - A + F$  e chamar este número a *característica de Euler-Poincaré* do poliedro  $P$ . A afirmação de que poliedros homeomorfos têm a mesma característica de Euler-Poincaré

se exprime dizendo que  $\chi(P)$  é um *invariante topológico* do poliedro  $P$ .

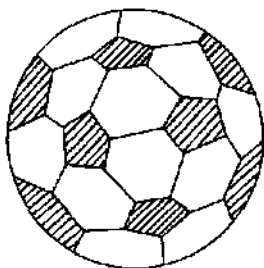


Figura 4. Uma bola de futebol é homeomorfa a um poliedro. Nesta subdivisão, embora curvilínea, ainda se tem  $V - A + F = 60 - 90 + 32 = 2$ .

Sabemos que  $\chi(P) = 2$  quando  $P$  é um tetraedro. Logo, todo poliedro homeomorfo ao tetraedro (ou seja, a uma esfera) tem característica de Euler-Poincaré igual a 2. Em particular, isto ocorre com todo poliedro convexo  $P$  pois projetando-o a partir de um ponto interior, sobre uma esfera  $S$  que contenha  $P$ , obtemos um homeomorfismo  $f: P \rightarrow S$ , como mostra a figura 5, a seguir.

Outro exemplo: como o poliedro da figura 2 tem característica zero, segue-se que todo poliedro homeomorfo a um toro cumpre  $V - A + F = 0$ .

Para todo número inteiro  $n$  positivo, negativo ou zero, existe um poliedro cuja característica de Euler-Poincaré é  $n$ .

A figura 6 mostra poliedros com características de Euler-Poincaré iguais a 1, 3 e  $-2$  respectivamente.

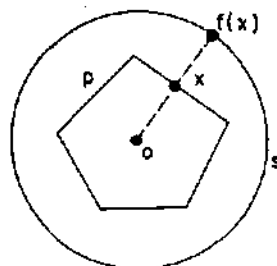


Figura 5.

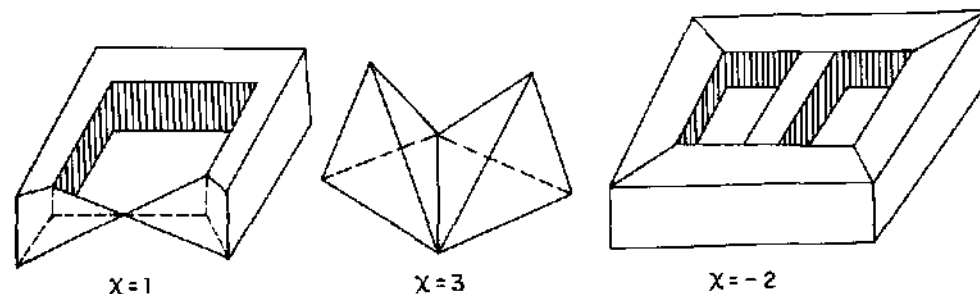


Figura 6.

**Observações:** 1. Euler resolveu brilhantemente o problema das pontes de Königsberg (vide Newman [1956], vol. I, pag. 573) porque percebeu que era uma questão de Topologia, mas não foi ele, e sim Poincaré, o primeiro a observar o mesmo para a relação de Euler  $V - A + F = 2$ .

2. A solução dada por Poincaré baseia-se em sua Teoria da Homologia. A rigor, ela só foi completada mesmo por Alexander [1915] com sua demonstração da invariância topológica dos grupos de homologia de um poliedro. (Poincaré admitia este fato mas nunca se preocupou em demonstrá-lo.)

3. Na verdade, não é necessário que os poliedros  $P, Q$  sejam homeomorfos para que valha  $\chi(P) = \chi(Q)$ . Basta que eles tenham o mesmo "tipo de homotopia", que constitui uma exigência bem menor. (Veja Pontriagin [1952], pags. 32 e 84.)

4. Hilbert-Cohn Vossen e Courant-Robbins (loc. cit) enunciam o Teorema de Euler para poliedros homeomorfos à esfera. Ambos usam a mesma demonstração, essencialmente devida a Cauchy. Ela será apresentada na seção seguinte e analisada criticamente logo depois.

5. Assim como a palavra "polígono" em Geometria Plana pode significar tanto o contorno como a região por ele limitada, também "poliedro" às vezes significa um corpo sólido e às vezes sua casca. No que tange ao Teorema de Euler, o sólido é irrelevante e poliedro é um ente bi-dimensional, formado por vértices, arestas e faces.

### 3. A demonstração de Cauchy

Ela será dividida em etapas, para facilitar a análise que faremos na seção seguinte.

**1ª Etapa.** Retira-se uma face do poliedro. Isto não altera os números  $V$ ,  $A$  mas  $F$  diminui de uma unidade. Basta então provar que o poliedro modificado cumpre a condição  $V - A + F = 1$ .

**2ª Etapa.** Diz-se que uma aresta do poliedro é *livre* quando é lado de apenas uma face. O poliedro modificado possui arestas livres, a saber: os lados da face retirada. Esticando-se o poliedro a partir das arestas livres, pode-se achatá-lo de modo que ele se transforme numa figura plana. Durante este processo, os números  $V$ ,  $A$  e  $F$  mantêm-se constantes. Se, em particular, o poliedro era convexo, este achatamento pode ser feito de modo bastante simples, projetando-se o poliedro modificado sobre um plano, a partir de um ponto situado tão próximo da face omitida que nenhuma semi-reta que parta desse centro de projeção contenha mais de um ponto do poliedro. Imaginando a origem dessas semi-retas como um foco luminoso, o modelo achatado do poliedro é sua sombra sobre o plano da projeção. (Figura 7.)

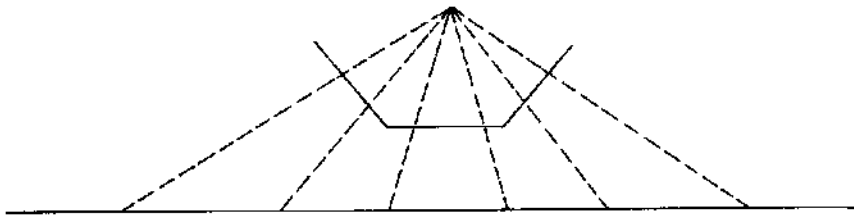
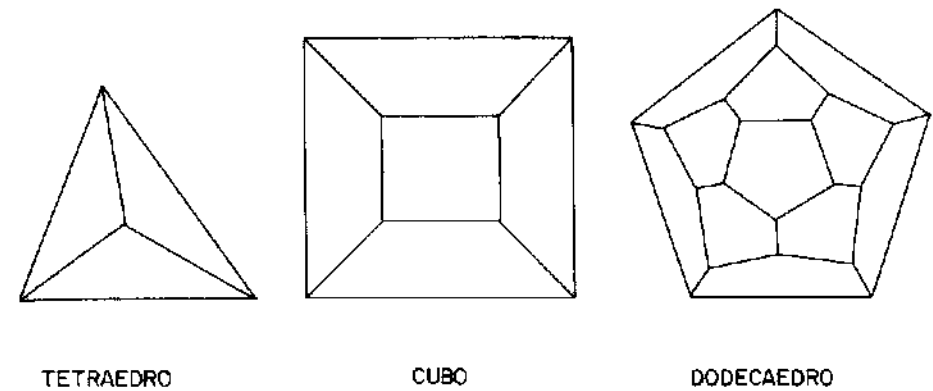


Figura 7.

A figura 8 mostra o resultado da aplicação das etapas 1 e 2 aos poliedros da figura 1.

**3ª Etapa.** Traçando diagonais que não se cortam, decompõe-se cada face em triângulos. Cada vez que se traça uma diagonal que não intersecta as outras, o número  $V$  não muda, enquanto  $A$  e  $F$  aumentam de uma unidade, logo  $V - A + F$  não se altera. Podemos então supor que todas as faces do poliedro são triângulos. A figura 9 mostra como fica o cubo

depois de executadas as etapas 1, 2 e 3.



TETRAEDRO

CUBO

DODECAEDRO

Figura 8.

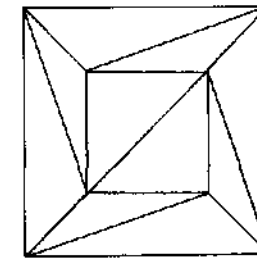


Figura 9.

**4ª Etapa.** Começa-se a “despetalar” o poliedro plano (cujas faces agora são triângulos), retirando-se uma a uma as faces que têm alguma aresta livre. Ao retirar cada uma dessas faces, o número  $V - A + F$  não se altera. Com efeito, se o triângulo retirado tem apenas uma aresta livre, sua retirada não muda  $V$  mas faz com que  $A$  e  $F$  diminuam ambos de uma unidade, o que deixa  $V - A + F$  constante. Se, porém, o triângulo tem duas arestas livres, ao retirá-lo estaremos diminuindo um vértice, duas arestas e uma face, logo  $V - A + F$  não se altera.

**5ª Etapa.** (Conclusão.) Retirando, uma a uma, as faces que têm alguma aresta livre chega-se, finalmente, à última, que é um triângulo, para o qual

se tem evidentemente  $V - A + F = 1$ . Isto conclui a demonstração.

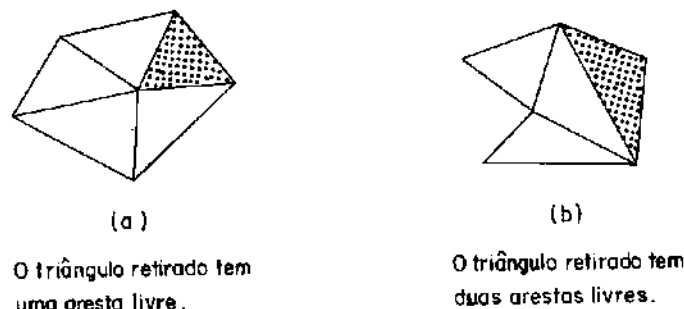


Figura 10.

#### 4. Análise da demonstração

Os argumentos da seção anterior devem provar alguma coisa. O problema é saber o que. Certamente trata-se de uma proposição sobre poliedros. Então, a primeira coisa a fazer para afastar dúvidas é definir o que se entende por poliedro.

Um *poliedro*  $P$  é a reunião de um número finito de polígonos convexos, chamados as *faces* de  $P$ . Os lados desses polígonos são chamados as *arestas* de  $P$ . Os *vértices* do poliedro são os vértices de suas faces.

Exige-se ainda de um poliedro  $P$  que suas faces estejam “regularmente dispostas”, isto é, que a interseção  $F \cap G$  de duas faces distintas de  $P$  seja uma aresta comum, um vértice comum a  $F$  e  $G$  ou seja vazia.

Todos os exemplos de poliedros apresentados nas seções anteriores se enquadram na definição acima. Os objetos da figura 11, a seguir, parecem poliedros mas não cumprem as condições da definição. No objeto à esquerda, as faces superior e inferior são regiões planas mas não são polígonos, muito menos polígonos convexos. À direita, a interseção da face  $F$  (quadrado) com a face  $G$  (retângulo) não é uma aresta (lado) de  $F$ .

Um subconjunto  $Q$  de um poliedro  $P$  chama-se um *subpoliedro* de  $P$  quando é reunião de algumas das faces de  $P$ . Evidentemente,  $Q$  é também um poliedro.

Chama-se *bordo* de um poliedro à reunião de suas arestas livres. (Como no §3, uma aresta diz-se *livre* quando é lado de apenas uma face

do poliedro.)

Dadas estas definições, passaremos a analisar, uma por uma, as sucessivas etapas da demonstração tradicional.

**1ª Etapa.** Para que este argumento valha, é preciso supor

A) que o poliedro  $P$  possua pelo menos uma face sem arestas livres.

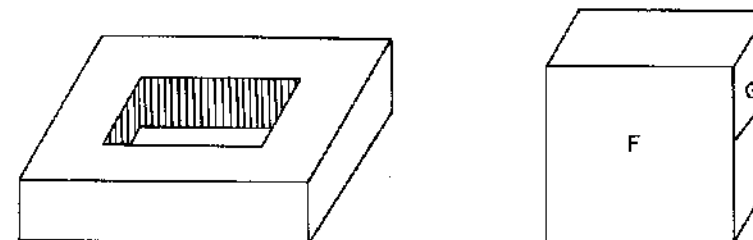


Figura 11.

**2ª Etapa.** A afirmação de que, omitindo-se uma face do poliedro, ele fica homeomorfo a um subconjunto do plano é válida quando o poliedro é homeomorfo a uma esfera, pois basta retirar um ponto da esfera para que ela fique homeomorfa ao plano. Mas qual é a vantagem de se reduzir o argumento a um poliedro planar? É a seguinte: todo poliedro planar (e por conseguinte qualquer dos seus subpoliedros) possui arestas livres. [Com efeito, todo subconjunto próprio de  $\mathbb{R}^2$  tem fronteira não vazia, e, se  $P \subset \mathbb{R}^2$  é um poliedro, a fronteira do conjunto  $P$  é a reunião de suas arestas livres.] Assim, para que sejam válidos os argumentos seguintes basta supor

B) que todo subpoliedro próprio de  $P$  tenha arestas livres.

**Exemplo.** No segundo poliedro da figura 6 (reunião de dois tetraedros com uma aresta comum), qualquer dos tetraedros é um subpoliedro próprio sem arestas livres. Então, se aplicarmos a ele o processo de despetalação, teremos que, no meio da operação, retirar mais uma vez uma face sem arestas livres, o que alterará  $\chi$  novamente.

**3ª Etapa.** Não há críticas a fazer, já que nossa definição de poliedro exige que as faces sejam polígonos convexos. Isto permite escolher em cada uma delas um vértice e traçar diagonais a partir dele.

**Observação:** O Teorema de Euler continua válido se admitirmos uma

noção mais geral de poliedro, no qual as faces não precisam ser polígonos convexos: basta que sejam polígonos *simples*. (Um polígono chama-se simples quando seu bordo é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem que se passe duas vezes pelo mesmo vértice.) Com efeito, todo polígono simples, convexo ou não, pode ser decomposto numa reunião de triângulos justapostos, cujos vértices são também vértices do polígono dado. (Se o polígono não é convexo, sua decomposição é feita ainda por meio de diagonais porém não todas partindo do mesmo vértice.)

**4ª Etapa.** Esta é a parte em que a demonstração de Cauchy se mostra mais deficiente. As possibilidades, a respeito do “triângulo retirado” não são apenas as duas ali consideradas. Na realidade, há mais quatro (!) possibilidades que não foram mencionadas, a saber:

- O triângulo a ser retirado tem duas arestas livres mas nenhum dos seus vértices é livre. (Isto é, seus 3 vértices pertencem também a outras faces que ainda não foram retiradas do poliedro.)
- O triângulo a ser retirado tem as três arestas livres mas nenhum dos seus vértices é livre.
- O triângulo a ser retirado tem três arestas e um vértice livres.
- O triângulo a ser retirado tem três arestas e dois vértices livres.

Estas possibilidades acham-se ilustradas na figura 12.

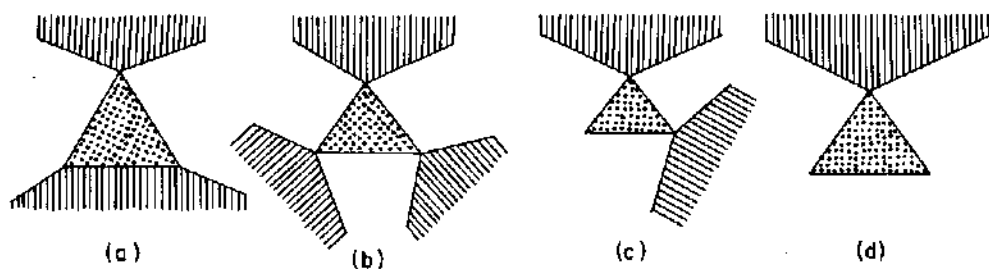


Figura 12.

Consideremos a possibilidade (a), em que o triângulo a ser omitido tem 2 arestas e nenhum vértice livre. Em primeiro lugar, devemos deixar explícito que o Teorema de Euler se refere a poliedros conexos. Diz-se que um poliedro  $P$  é *conexo* quando não é possível escrevê-lo como reunião

$P = P_1 \cup P_2$ , onde  $P_1$  e  $P_2$  são subpoliedros de  $P$  com  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ , salvo no caso trivial em que  $P_1$  ou  $P_2$  é vazio. Isto equivale a afirmar que dois vértices quaisquer de  $P$  podem ser ligados por uma poligonal formada por arestas de  $P$ . Todo poliedro  $P$ , conexo ou não, se exprime de modo único como uma reunião finita de subpoliedros conexos máximos (isto é, que não estão contidos propriamente noutro subpoliedro conexo), chamados as *componentes conexas* de  $P$ . Para demonstrar o Teorema de Euler, devemos supor

C) que o poliedro  $P$  seja conexo.

Então, no processo de despentalar o poliedro, enquanto retirarmos faces como as da figura 10, continuaremos obtendo poliedros conexos. Afirmamos agora que, ao retirarmos um triângulo do tipo (a) da figura 12, se o poliedro era conexo deixará de sê-lo e, em geral, se era desconexo, o número de suas componentes conexas aumentará de uma unidade. Para provar isto, vamos ter que fazer uma hipótese adicional, precedida de uma definição. Um *ciclo* num poliedro  $P$  é uma linha poligonal fechada, cujos lados são arestas de  $P$ . Diz-se que um ciclo  $\gamma \subset P$  é um *bordo* quando existe um subpoliedro  $Q \subset P$  tal que  $\gamma$  é o conjunto das arestas livres de  $Q$ . Admitamos então

D) que todo ciclo em  $P$  seja um bordo.

Com isto provaremos que, retirando o triângulo  $xyz$  cujos lados  $xz$  e  $yz$  são arestas livres mas o vértice  $z$  e o lado  $xy$  não são livres, obtemos um novo poliedro, no qual os vértices  $x$  e  $z$  pertencem a componentes conexas distintas, isto é, não podem ser ligados por uma poligonal cujos lados são arestas. Com efeito, suponhamos (por absurdo) que, retirado o triângulo  $xyz$ , houvesse ainda uma poligonal  $\gamma$  (da qual os lados  $xz$  e  $yz$  não fazem parte) cujos extremos fossem  $x$  e  $z$ . Pela hipótese D),  $\gamma \cup xz$  seria bordo de algum subpoliedro (do poliedro obtido com a retirada de  $xyz$ ). Em particular,  $xz$  seria lado de outro triângulo além de  $xyz$ , contrariando o fato de  $xz$  ser aresta livre. Assim, no caso (a) da figura 12, a retirada do triângulo  $xyz$  faz  $V$  ficar constante, diminui  $A$  de duas unidades e  $F$  de uma, logo faz  $V - A + F$  aumentar de uma unidade. Em compensação, o número de componentes conexas também aumenta de uma unidade, o que nos permite continuar despentalando em cada componente, e a demonstração se conclui como antes.

Antes de passar às outras três possibilidades da figura 12, convém

corrigir o uso indevido que fizemos da hipótese D). Com efeito, esta condição diz respeito ao poliedro inicial  $P$ , nada nos garantindo que ela continue a ser satisfeita por todos os poliedros que são obtidos de  $P$  mediante sucessivas retiradas de faces. Por exemplo, se  $P$  for o poliedro da figura 9, a hipótese D) é verificada, mas a primeira etapa da demonstração nos leva a omitir um dos triângulos internos, o que fornece um novo poliedro, no qual tanto o contorno externo como o interno são ciclos que não constituem o bordo de qualquer subpoliedro. Para evitar esse tipo de problema, faremos mais uma hipótese, supondo agora

E) *que toda aresta de  $P$  seja lado de exatamente duas faces de  $P$ .*

Agora podemos mostrar, inicialmente, que se  $P'$  se obtém  $P$  por omissão de uma face  $T$  então a condição D), que era válida para o poliedro  $P$ , continua válida para  $P'$ . Com efeito, dado um ciclo  $\gamma$  em  $P'$ , seja  $Q$  um subpoliedro de  $P$  cujo bordo é  $\gamma$ . Então a hipótese E) implica imediatamente que  $Q' = P - Q$  é outro subpoliedro de  $P$  cujo bordo ainda é  $\gamma$ , sendo  $Q \cap Q' = \gamma$  e  $Q \cup Q' = P$ . Assim, dos dois subpoliedros  $Q, Q'$ , um apenas contém o triângulo  $T$ . Seja, por exemplo,  $T \subset Q$ . Então  $Q'$  é um subpoliedro de  $P'$  cujo bordo é  $\gamma$ , o que comprova a hipótese D) em  $P'$ . Em seguida observemos que se o poliedro  $P'$  cumpre a condição D) e  $P'' = P' - T$ , onde  $T$  é uma face de  $P'$  com uma ou duas arestas livres, mas sem vértices livres, como na figura 10 (a) então  $P''$  ainda cumpre a condição D). Com efeito, se  $\gamma \subset P''$  é um ciclo então existe um subpoliedro  $Q \subset P'$ , cujo bordo é  $\gamma$ . Mas  $T$  não pode ser face de  $Q$  porque  $T \subset Q$  implicaria que o bordo de  $Q$  (isto é,  $\gamma$ ) conteria necessariamente as faces livres de  $T$  (absurdo, pois  $\gamma \subset P' - T$ ). Portanto  $Q \subset P''$ , logo  $P''$  cumpre a condição D). Finalmente, se  $P'$  cumpre a condição D) e  $T$  é o triângulo pontilhado da parte (a) da figura 12, afirmamos que cada componente conexa de  $P'' = P' - T$  ainda cumpre D). O raciocínio é análogo ao do caso anterior. Com efeito, dado um ciclo  $\gamma$  numa componente conexa  $C$  de  $P''$ , existe um subpoliedro  $Q \subset P'$  cujo bordo é  $\gamma$ . Afirmamos que  $Q \subset C$ . Com efeito, se  $Q$  contivesse faces de mais de uma componente, teria que conter  $T$  mas então o bordo de  $Q$ , além de  $\gamma$ , teria que conter as faces livres de  $T$ .

Completada a demonstração do caso (a) da figura 12, tratemos rapidamente dos demais. No caso (b), ao retirar o triângulo pontilhado,  $V - A + F$  aumenta de duas unidades e, usando novamente a condição D), pode-se mostrar que o número de componentes conexas também au-

menta de duas unidades. O caso (c) é inteiramente análogo ao (a) e o caso (d) é óbvio.

Podemos agora ver exatamente o que ficou provado pela demonstração de Cauchy. Antes de enunciar o resultado final, convém observar que a condição E) dispensa a necessidade de supor A) e, além disso, diante de E), a condição B) é equivalente a outra, bem mais conhecida em Topologia, que introduziremos agora.

Diremos que duas faces  $T, S$  de um poliedro  $P$  são *encadeadas* quando existe uma seqüência  $T_1, T_2, \dots, T_n$  de faces de  $P$  tais que  $T_1 = T, T_n = S$  e, para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , a interseção  $T_i \cap T_{i+1}$  é uma aresta comum a  $T_i$  e  $T_{i+1}$ . Podemos então exigir do poliedro  $P$  a condição

B\*) *que duas faces quaisquer de  $P$  sejam encadeadas.*

Evidentemente, B\*) implica que o poliedro  $P$  é conexo, logo dispensa a condição C). Provemos agora que, na presença de E), as condições B) e B\*) são equivalentes.

Em primeiro lugar, suponhamos B). Dada uma face  $T$ , seja  $Q$  a reunião das faces de  $P$  que podem ser encadeadas com  $T$ . Afirmamos que  $Q = P$ . Do contrário, em virtude de B), o subpoliedro  $Q$  teria uma aresta livre  $\alpha$ , pertencente a uma face  $S \subset Q$ , logo  $S$  encadeável com  $T$ . Pela condição E), a aresta  $\alpha$  pertenceria a outra face  $S'$  de  $P$ . Como  $\alpha$  é livre em  $Q$ , a face  $S'$  não estaria em  $Q$ , o que é absurdo pois  $S'$  é evidentemente encadeável a  $T$ .

Reciprocamente, suponhamos que o poliedro  $P$  cumpra B\*). Para mostrar que todo subpoliedro próprio  $Q \subset P$  tem alguma aresta livre, tomemos uma face  $S$  em  $P - Q$  e uma face  $T$  em  $Q$ . Pela hipótese B\*), existe uma cadeia  $T_1, T_2, \dots, T_n$  em  $P$ , com  $T_1 = T$  e  $T_n = S$ . Seja  $T_i$  a última face desta cadeia que pertence a  $Q$ . Então  $i < n$  e a aresta  $\alpha = T_i \cap T_{i+1}$  é livre em  $Q$  pois se  $\alpha$  fosse lado de outra face em  $Q$  além de  $T_i$ , essa face (em virtude de E)) teria de ser  $T_{i+1}$ , o que é absurdo pois  $T_{i+1}$  não está contida em  $Q$ .

Finalmente descobrimos qual a proposição provada pela demonstração de Cauchy. Ela é o seguinte

**Teorema.** *Seja  $P$  um poliedro no qual:*

- 1<sup>o</sup>) *Toda aresta está contida exatamente em duas faces;*
- 2<sup>o</sup>) *Dois faces quaisquer são encadeadas;*
- 3<sup>o</sup>) *Todo ciclo é um bordo.*

Então  $P$  cumpre a relação de Euler  $V - A + F = 2$ .

Se o poliedro  $P$  é homeomorfo a uma esfera, então as condições 1<sup>o</sup>), 2<sup>o</sup>) e 3<sup>o</sup>) acima são satisfeitas. (Vide Seifert-Threlfall 1954, pag. 166.) Mas isto é um resultado profundo de Topologia, equivalente à demonstração da invariância dos grupos de homologia da esfera  $S^2$ . Não se pode, portanto, esperar obter uma demonstração elementar do Teorema de Euler com a hipótese de que  $P$  é homeomorfo a uma esfera, como fazem Hilbert-Cohn Vossen e Courant-Robbins.

Jonas de M. Gomes chamou a minha atenção para o fato de que, reciprocamente, todo poliedro  $P$  que cumpre as três condições do teorema acima é uma superfície topológica logo (em virtude do teorema de classificação das superfícies) a terceira condição implica que  $|P|$  é homeomorfo a uma esfera.

## Referências

1. Alexander, J., *A proof of the invariance of certain constants in Analysis Situs*, Trans. Am. Math. Soc. **16** (1915), 148–154.
2. Azambuja Filho, Z., *Demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos*, Revista do Professor de Matemática **3** (1983), 15–17.
3. Cauchy, A.L., “Oeuvres”, 2me. partie, 1813, pp. 7–38.
4. Courant, R. e Robbins, H., “What is Mathematics?”, Oxford Univ. Press, 1951.
5. Gerresten, J. e Verdenduin, *Polygons and polyhedra*, in “Fundamentals of Mathematics”, (H. Behnke et al. eds.), The M.I.T. Press, 1974, p. 266.
6. Federico, P.J., “Descartes on Polyhedra”, Springer Verlag, 1982.
7. Hilbert, D. e Cohn Vossen, S., “Geometry and the Imagination”, Chelsea, 1956.
8. Lakatos, I., “Proofs and Refutations”, Cambridge Univ. Press, 1976.
9. Legendre, A.M., “Éléments de Géométrie”, Chez Firmin Didot Frères, Paris, 1946.
10. Lima, E.L., *Ainda sobre o teorema de Euler para poliedros convexos*, Revista do Professor de Matemática **5** (1984), 23–27.
11. Newman, J., “The World of Mathematics”, Simon and Schuster, 1956.
12. Poincaré, H., *Sur la généralization d'un Théorème d'Euler relatif aux polyèdres*, C.R. Acad. Sci. Paris **117** (1893), p. 144.
13. Pontriagin, L., “Foundations of Combinatorial Topology”, Graylork, 1952.
14. Seifert, H. e Threlfall, W., “Lecciones de Topologia”, Inst. Jorge Juan de Matemáticas, Madrid, 1951.

**M**eu conhecimento com o Professor Zoroastro Azambuja Filho começou quando ele me trouxe pessoalmente este artigo sobre o Teorema de Euler, para ser publicado na Revista do Professor de Matemática.

*Ele salientava a necessidade de se divulgar amplamente uma demonstração do Teorema de Euler que fosse ao mesmo tempo correta e acessível aos professores e alunos do segundo grau de nossas escolas. Apresentava-me sua versão, sua proposta para uma tal demonstração. Não sabia se era aceitável mas insistia que, nesse caso, outra prova fosse publicada.*

*Bobagem; sua demonstração é bastante aceitável. De saída achei boa aquela idéia do sol a pino sobre o poliedro, os pontos iluminados e os sombrios. Sua exposição é elegante e, quanto a mim, (como lhe declarei) ficaria muito contente se a visse utilizada sempre que aquele teorema fosse estudado.*

## Demonstração do Teorema de Euler para Poliedros Convexos

Por intermédio de um colega, tomei conhecimento do artigo intitulado “O Teorema de Euler sobre poliedros”, escrito pelo Professor Elon Lages Lima, publicado no número de outubro de 1982 do “Noticiário da Sociedade Brasileira de Matemática”.

Sou professor de Matemática e já perdi a conta do número de vezes que demonstrei – ou julguei tê-lo feito – em classe o Teorema de Euler para poliedros. Por isso fiquei muito chocado ao saber que a demonstração que sempre usei, e que consta de todos os livros-texto que conheço, não está certa.

Na esperança de aprender uma demonstração correta, li com grande atenção o referido artigo. Estou agora convencido de que a argumentação que eu utilizava é insuficiente.

Infelizmente, a maneira sugerida pelo autor do artigo para corrigir o que chama “a demonstração de Cauchy” me parece excessivamente elaborada e longa para o nível dos alunos de nossos colégios.

Por outro lado, num trecho do seu trabalho, o Professor Elon menciona uma demonstração particular, válida apenas para poliedros convexos, e faz referência a um livro de autores alemães, traduzido para o inglês, onde se encontra tal prova.

Consegui uma cópia xerox daquela demonstração e, depois de meditar sobre o assunto, decidi que prestaria um serviço aos meus colegas divulgando a minha maneira de ver essa prova do Teorema de Euler.

O teorema a demonstrar é o seguinte:

Seja  $P$  um poliedro convexo com  $F$  faces,  $A$  arestas e  $V$  vértices. Tem-se necessariamente  $F - A + V = 2$ .

Para que não haja ambigüidade quanto aos termos que empregaremos, é conveniente relembrar algumas definições.

Um conjunto  $C$ , do plano ou do espaço, diz-se *convexo* quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de  $C$  está inteiramente contido em  $C$ .

Um *poliedro* é uma reunião finita de polígonos convexos, chamados as *faces* do poliedro. Os lados desses polígonos chamam-se *arestas* do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados *vértices* do poliedro. Exige-se ainda que a interseção de duas faces quaisquer do poliedro seja uma aresta comum a essas faces, ou um vértice comum, ou seja vazia.

Diz-se que um poliedro é *convexo* quando ele limita um sólido convexo no sentido da definição acima. Cada aresta de um poliedro convexo é lado de exatamente duas faces desse poliedro. Aceitaremos este fato como parte da definição, embora saibamos que ele pode ser demonstrado a partir dela.

Para demonstrar o Teorema de Euler, começamos escolhendo uma reta  $r$  que não seja paralela a nenhuma das faces do poliedro convexo  $P$ . Tomamos também um plano  $H$ , que não intersecta  $P$  e é perpendicular à reta  $r$ .

O plano  $H$  será chamado *plano horizontal* e as retas paralelas a  $r$  (logo perpendiculares a  $H$ ) serão chamadas *retas verticais*.

$H$  divide o espaço em dois semi-espacos, um dos quais contém o poliedro  $P$ . Este será chamado o semi-espaco *superior*; diremos que seus pontos estão *acima* de  $H$ .

Para melhor ilustrar nosso raciocínio, imaginaremos o sol brilhando a pino sobre o semi-espaco superior, de modo que seus raios sejam retas verticais.

A cada ponto  $x$  do semi-espaco superior corresponde um ponto  $x'$  em  $H$ , chamado a *sombra* de  $x$ , obtido como interseção do plano  $H$  com a reta vertical que passa por  $x$ .

A sombra de qualquer conjunto  $X$ , contido no semi-plano superior é, por definição, o conjunto  $X'$ , contido em  $H$ , formado pelas sombras dos pontos de  $X$ .

A interseção de uma reta vertical com o conjunto convexo limitado pelo poliedro  $P$  é um subconjunto convexo dessa reta, logo (se não for vazio) é um segmento de reta, cujos extremos pertencem a  $P$ , ou é um único ponto de  $P$ .

Segue-se que uma reta vertical arbitrária só pode ter 0, 1 ou 2 pontos em comum com o poliedro convexo  $P$ .

A observação acima pode ser reformulada do seguinte modo: cada ponto da sombra  $P'$  do poliedro  $P$  é sombra de um ou de dois pontos de

$P$ .

Ora, a sombra  $P'$  do poliedro  $P$  é um polígono convexo do plano horizontal, cujo contorno  $\gamma'$  é a sombra de uma poligonal fechada  $\gamma$ , formada por arestas de  $P$ . Cada ponto de  $\gamma'$  é sombra de um único ponto de  $P$  (pertencente a  $\gamma$ ).

A poligonal  $\gamma$  é chamada o contorno aparente do poliedro  $P$ . Cada ponto interior de  $P'$  (isto é, não pertencente a  $\gamma'$ ) é sombra de 2 pontos de  $P$ .

Dados dois pontos de  $P$  que têm a mesma sombra, ao mais alto (mais distante de  $H$ ) chamaremos *ponto iluminado*; o mais baixo será chamado *sombrio*.

Assim, o poliedro  $P$  se decompõe em 3 partes disjuntas: o conjunto dos pontos iluminados, o conjunto dos pontos sombrios e o contorno aparente  $\gamma$ .

Por exemplo, seja  $P$  o cubo que tem os quadrados  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$  como faces opostas. Pendurando-o pelo vértice  $A$  (de modo que  $A$  e  $C'$  estejam na mesma vertical), as faces  $AA'B'B$ ,  $AA'D'D$  e  $ABCD$  ficarão iluminadas e as outras 3 sombrias. O contorno aparente será a poligonal  $A'B'BCDD'A'$ . (Figura 1, a seguir.)

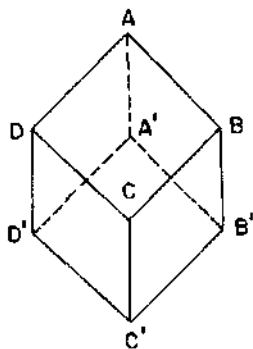


Figura 1.

Seja  $P_1$  o conjunto dos pontos iluminados de  $P$  mais o contorno aparente  $\gamma$ . Cada ponto de  $P'$  é a sombra de um único ponto de  $P_1$ .

Noutras palavras, a regra que associa a cada ponto  $x$  de  $P_1$  sua sombra  $x'$  é uma correspondência biunívoca entre  $P_1$  e  $P'$ .

Usaremos a notação  $P'_1$  para representar o polígono  $P'$  decomposto

como reunião de polígonos justapostos, que são sombras das faces contidas em  $P_1$ , isto é das faces iluminadas.

Evidentemente, poderíamos também considerar o conjunto  $P_2$ , formado pelos pontos sombrios de  $P$  mais o contorno aparente de  $\gamma$ . A regra que associa a cada ponto  $y$  de  $P_2$  sua sombra  $y'$  também é uma correspondência biunívoca entre  $P_2$  e  $P'$ .

Escreveremos  $P'_2$  para indicar a sombra de  $P_2$  expressa como reunião das sombras das faces sombrias de  $P$ , isto é, contidas em  $P_2$ .

Completaremos os preparativos para a demonstração do Teorema de Euler observando que se decomposermos cada face de  $P$  em triângulos, traçando diagonais em cada uma delas, alteraremos os números  $F$ ,  $A$  e  $V$  individualmente, mas a expressão  $F - A + V$  permanecerá com o mesmo valor. Com efeito, cada vez que se traça uma diagonal numa face, os números  $F$  e  $A$  aumentam, cada um, de uma unidade e o número  $V$  não muda. Na expressão  $F - A + V$ , os acréscimos de  $F$  e  $A$  se cancelam.

Portanto, a fim de demonstrar o Teorema de Euler, não há perda de generalidade em supor que todas as faces do poliedro  $P$  são triângulos. Esta hipótese será feita a partir de agora.

Como toda face tem 3 arestas e cada aresta pertence a 2 faces, segue-se que  $3F = 2A$ . Esta relação será usada logo mais.

Montando o cenário e apresentados os personagens, iniciaremos agora a ação. A idéia da demonstração consiste em calcular de duas maneiras distintas a soma  $S$  dos ângulos internos dos triângulos que compõem o poliedro  $P$ .

Em primeiro lugar, há  $F$  triângulos e a soma dos ângulos internos de cada um deles é igual a 2 ângulos retos, isto é, a  $\pi$  radianos. Portanto  $S = \pi \cdot F$ . Como  $F = 3F - 2F = 2A - 2F$ , podemos escrever

$$S = 2\pi \cdot A - 2\pi \cdot F.$$

Por outro lado, temos  $S = S_1 + S_2$ , onde  $S_1$  é a soma dos ângulos internos dos triângulos iluminados e  $S_2$  é a soma dos ângulos internos dos triângulos sombrios.

A fim de calcular  $S_1$ , partimos da observação super-evidente (porém crucial) de que a soma dos ângulos internos de um triângulo  $T$  é igual à soma dos ângulos internos de sua sombra  $T'$ . Daí resulta que  $S_1$  é igual à soma dos ângulos internos dos triângulos nos quais está decomposto o polígono convexo  $P'_1$ , sombra de  $P_1$ .

Para calcular esta última soma, somemos os ângulos vértice a vértice, em vez de somá-los triângulo por triângulo, como acima.

Sejam  $V_1$  o número de vértices iluminados,  $V_2$  o número de vértices sombrios e  $V_0$  o número de vértices do contorno aparente  $\gamma$ . Então  $V = V_0 + V_1 + V_2$ .

Notemos ainda que  $V_0$  é também o número de vértices (e de lados) da poligonal  $\gamma'$ , contorno do polígono convexo  $P'$ .

Em  $P'$  temos  $V_1$  vértices interiores (sombrias dos vértices iluminados) mais  $V_0$  vértices no contorno  $\gamma'$ .

A soma dos ângulos que têm como vértice um dado vértice interior é igual a  $2\pi$  radianos (4 ângulos retos).

A soma de todos os ângulos que têm vértice sobre o contorno  $\gamma'$  é igual a  $\pi(V_0 - 2)$ , de acordo com a expressão bem conhecida da soma dos ângulos internos de um polígono com  $V_0$  lados. Segue-se que

$$S_1 = 2\pi \cdot V_1 + \pi(V_0 - 2).$$

Por um raciocínio inteiramente análogo, obteríamos

$$S_2 = 2\pi \cdot V_2 + \pi(V_0 - 2).$$

Somando estas duas igualdades, vem

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi(V_0 + V_1 + V_2) - 4\pi = 2\pi \cdot V - 4\pi.$$

Comparando com a igualdade  $S = 2\pi \cdot A - 2\pi \cdot F$ , acima obtida, e dividindo por  $2\pi$ , resulta que

$$A - F = V - 2,$$

ou seja,

$$F - A + V = 2,$$

como queríamos demonstrar.

**E**stabelecidos adequadamente os limites de validade do argumento usado por Cauchy para demonstrar o teorema de Euler e conhecida a exposição, feita no artigo anterior, do mesmo teorema no caso de poliedros convexos, a qual pode ser tranqüilamente usada nas turmas de segundo grau, por que mais uma prova do mesmo resultado?

Bem, há pelo menos três justificativas.

Em primeiro lugar, para lembrar a prioridade de A.M. Legendre como o primeiro a dar uma demonstração correta e compreensível do teorema em questão. Evidentemente, essa prioridade já está registrada nos livros de História da Matemática e nos tratados especializados sobre a evolução da Geometria. O que se quis aqui foi principalmente pôr sua bela demonstração ao alcance dos professores secundários de nosso país, formulando-a de um modo que supomos acessível a todos.

Em segundo lugar, por causa da Geometria Esférica. Ela é tão bonita e singela que dá pena ver como foi relegada ao esquecimento. Em particular, para recordar a bela fórmula de Girard sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico. Um resultado como este devia ser mais conhecido. Antes de escrever este trabalho indaguei a dois colegas, destacados geômetras, onde encontrar uma demonstração elementar da fórmula de Girard. Ambos me disseram (separadamente): "É um caso particular do Teorema de Gauss-Bonnet, da Geometria Diferencial". "Isto eu sei", respondi. "Quero uma prova elementar". Um deles me disse: "Está no livro do Wolfe". (Introduction to Non-Euclidean Geometry, por H.E. Wolfe.) Não estava. Havia um exercício, sem sugestão, apenas o enunciado. O outro me disse: "Resulta de fórmulas da Trigonometria Esférica". Muito vago. Conclusão: vale realmente a pena divulgar uma prova elementar do Teorema de Girard, mesmo uma que já tenha sido muito conhecida há um século e meio, e hoje não seja mais. (O conhecimento, mesmo científico, não é cumulativo, não cresce com o tempo.)

Finalmente, a razão mais forte: lembrar a Geometria de Legendre, induzir os jovens professores de hoje a procurar nela, e em outros grandes compêndios de outrora, inspiração para moldar seu ensino em bases mais confiáveis.

# Ainda sobre o Teorema de Euler para Poliedros Convexos

## 1. Introdução

O número 3 da RPM traz um artigo do Professor Zoroastro Azambuja Filho, com uma demonstração do teorema de Euler para poliedros convexos. Lendo-o, ocorreu-me que talvez fosse interessante para os leitores desta Revista conhecer a prova desse teorema dada por A.M. Legendre, onde se apresenta, pela primeira vez, a idéia central do argumento exposto pelo Prof. Azambuja, baseado na soma dos ângulos de um polígono.

A demonstração de Legendre, embora menos elementar, pois usa a fórmula da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, é por isso mais educativa, já que algumas noções básicas a respeito da Geometria Esférica constituem um assunto instrutivo e belo, ao alcance dos professores de Matemática no 2º grau.

Adrien Marie Legendre (1752 + 81 = 1833) foi um notável matemático francês. Dentro de uma tradição que muitos dos seus compatriotas ainda seguem, sua destacada posição científica não o impediu de se interessar pelo ensino elementar.

Uma de suas obras mais conhecidas é o livro “*Éléments de Géométrie*”, publicado pela primeira vez em 1794, traduzido em inglês, alemão, italiano, romeno e até mesmo português.

A biblioteca do IMPA possui um exemplar da 14ª edição, impresso em Paris em 1846, treze anos depois da morte do autor, um exemplar da “*prima edizione Napolitana, fatta sulla dodicesima edizione Francese*”, publicada em Nápoles, 1831, e uma cópia xerox de uma edição portuguesa, traduzida da 26ª edição francesa, sem data. (Original na Universidade de Brasília.)

A Geometria de Legendre, que tanto ajudou no treinamento matemático de sucessivas gerações em vários países, é um livro fascinante pela clareza, simplicidade e originalidade de apresentação.

Além disso, suas edições consecutivas contam a história das repetidas

tentativas de seu autor, buscando demonstrar o postulado das paralelas. Mas esse é outro assunto.

Da Geometria de Legendre, interessa-nos aqui e agora a demonstração do Teorema de Euler para poliedros convexos. Foi a primeira demonstração inteligível desse teorema a ser publicada.

Creio que muitos de nós nos deleitaremos com a elegância e a beleza do raciocínio nela contido, o qual passaremos a expor.

## 2. Demonstração

Seja  $P$  um poliedro convexo, com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces.

Por conveniência, suporemos que as faces de  $P$  são triângulos. (Se isto não for verdade, por meio de diagonais decomporíamos cada face em triângulos, sem alterar o número  $V - A + F$ . Com efeito, cada vez que traçamos uma diagonal numa face, o número  $V$  não se altera, enquanto cada um dos números  $A$  e  $F$  aumenta de uma unidade, esses aumentos se cancelando na expressão  $V - A + F$ .)

Consideremos uma esfera  $E$ , de raio  $r$ , cujo centro  $O$  é um ponto situado no interior do poliedro  $P$ . Projetando radialmente o poliedro  $P$  sobre a esfera  $E$ , obtemos uma decomposição de  $E$  em triângulos esféricos, dispostos de modo semelhante à situação das faces de  $P$ . Em particular, a esfera  $E$  fica recoberta por  $F$  triângulos esféricos, com um total de  $A$  lados e  $V$  vértices.

Esclareçamos que uma figura sobre a esfera  $E$  chama-se um *triângulo esférico* quando está contida propriamente em algum hemisfério e é limitada por três arcos de círculos máximos, chamados seus *lados*. (Todos menores do que uma semi-circunferência.)

Note que a interseção  $E \cap L$  de uma esfera  $E$  com qualquer plano  $L$  que a encontre, é um círculo (ou um ponto, no caso excepcional em que o plano  $L$  é tangente à esfera). Quando o plano  $L$  passa pelo centro da esfera  $E$ , a interseção  $E \cap L$  chama-se um *círculo máximo*.

A projeção radial de um segmento de reta  $AB$  é um arco de círculo máximo  $ab$  sobre a esfera  $E$  (salvo no caso em que  $A, B$  e o centro  $O$  da esfera estão na mesma reta). Com efeito,  $A, B$  e  $O$  determinam um plano, que corta a esfera segundo um círculo máximo do qual  $ab$  é um arco.

Quando dois arcos de círculos máximos têm uma extremidade comum, o ângulo  $\alpha$  formado por esses arcos é, por definição, o ângulo entre

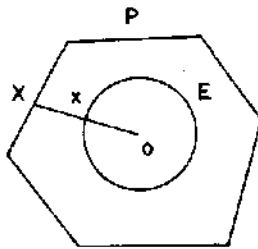


Figura 1. O ponto  $x$  da esfera  $E$  é a projeção radial do ponto  $X$  do poliedro  $P$ .

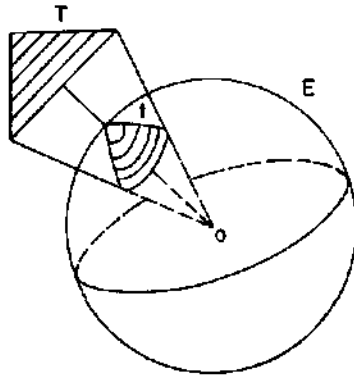


Figura 2. O triângulo esférico  $t$ , sobre a esfera  $E$ , é a projeção radial do triângulo  $T$ .

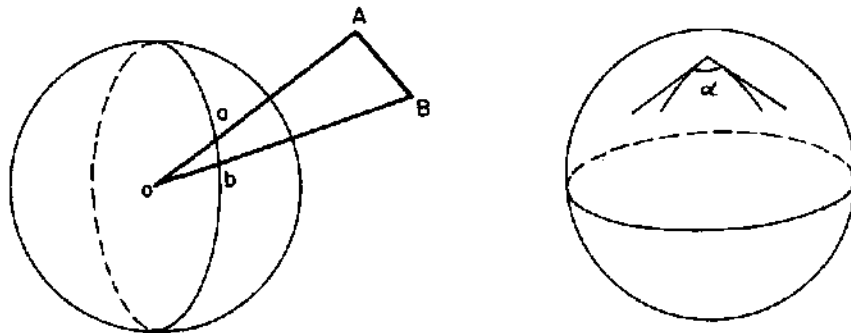


Figura 3.

as semi-retas tangentes a esses arcos.

O geômetra francês Albert Girard demonstrou (em 1629) que se os ângulos  $\alpha, \beta, \gamma$  de um triângulo esférico forem medidos em radianos, a soma  $\alpha + \beta + \gamma$  é dada pela fórmula

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2},$$

onde  $a$  é a área do triângulo e  $r$  é o raio da esfera.

Esta fórmula é o fato básico no qual se fundamentou Legendre para demonstrar o Teorema de Euler. Na seção seguinte provaremos a fórmula de Girard. Agora vamos mostrar como o Teorema de Euler resulta dela, de forma simples e elegante.

Voltemos à nossa decomposição da esfera  $E$  em  $F$  triângulos esféricos, com um total de  $A$  lados e  $V$  vértices. Para cada um desses triângulos  $t$ , vale a fórmula de Girard

$$s_t = \pi + a_t/r^2,$$

onde  $s_t$  é a soma dos ângulos e  $a_t$  é a área do triângulo esférico  $t$ .

Temos ao todo  $F$  igualdades como esta acima. Somando-as todas vem:

$$\sum s_t = \pi \cdot F + \frac{\sum a_t}{r^2}.$$

Ora,  $\sum s_t = 2\pi \cdot V$  porque a soma dos ângulos em torno de cada vértice é igual a  $2\pi$ . Além disso,  $\sum a_t = 4\pi r^2 =$  área da superfície esférica  $E$ . Portanto a igualdade acima se escreve  $2\pi \cdot V = \pi \cdot F + 4\pi r^2/r^2$ . Simplificando, temos  $2V = F + 4$ , isto é:

$$2V - F = 4. \tag{*}$$

Para obter uma relação entre  $F$  (número de triângulos esféricos) e  $A$  (número total de lados desses triângulos), observamos que todo triângulo tem 3 lados, e toda aresta é lado de 2 triângulos, logo  $3F = 2A$ , ou seja:

$$F = 2A - 2F.$$

Substituindo  $F$  por este valor na igualdade (\*), vem  $2V - 2A + 2F = 4$ , donde

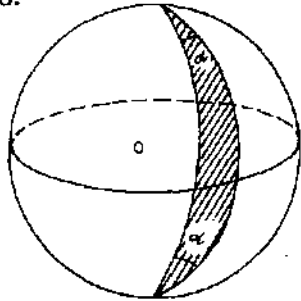
$$V - A + F = 2.$$

que é a relação de Euler.

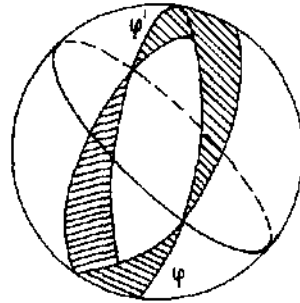
### 3. Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

Seja  $E$  uma esfera de centro  $O$  e raio  $r$ , a qual permanecerá fixa no decorrer desta seção.

Um *fuso* é uma região da esfera compreendida entre dois círculos máximos. Esses círculos têm dois pontos (diametralmente opostos) em comum, chamados os *vértices* do fuso. O ângulo do fuso é, por definição, o ângulo  $\alpha$  entre os dois círculos máximos que constituem os lados do fuso.



Um fuso de ângulo  $\alpha$



Um fuso completo

Figura 4.

Um fuso de ângulo  $\alpha = \pi$  é um hemisfério (cuja área é  $2\pi r^2$ ). Um fuso de ângulo  $\pi/2$  ocupa 1/4 da esfera, de modo que sua área é  $\pi r^2$ . De um modo geral, a área de um fuso é proporcional ao seu ângulo. Assim sendo, se o ângulo do fuso mede  $\alpha$  radianos, a área desse fuso é igual a  $2\alpha \cdot r^2$ .

Dado um ponto qualquer  $x$  na esfera, seu antípoda  $x'$  é, por definição, o único ponto da esfera tal que o segmento de reta  $xx'$  contém o centro  $O$ .

Dado um fuso  $\varphi$  na esfera, o conjunto formado pelos antípodas dos pontos de  $\varphi$  é ainda um fuso  $\varphi'$ , chamado o *fuso antípoda* de  $\varphi$ . A reunião  $\Phi = \varphi \cup \varphi'$  chama-se um *fuso completo*.

**Teorema** Seja  $\Phi$  um fuso completo, cujo ângulo mede  $\alpha$  radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da esfera a decompõe em dois hemisférios  $H$  e  $H'$ . As partes  $R, R'$  do fuso completo  $\Phi$  contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área  $2\alpha \cdot r^2$ .

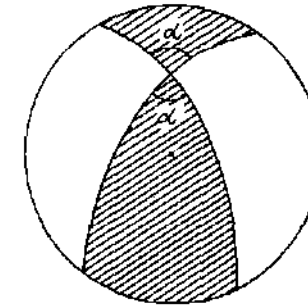


Figura 5. A região hachurada é a parte de um fuso completo contida num hemisfério arbitrário. Sua área é  $2\alpha \cdot r^2$ .

**Demonstração:** Basta provar que  $R$  e  $R'$  têm a mesma área porque então área de  $\Phi = (\text{área de } R) + (\text{área de } R') = 2 (\text{área de } R)$  e daí área de  $R = \text{metade da área de } \Phi = \alpha \cdot r^2$ . Ora,  $R$  e  $R'$  são figuras *antípodas*, isto é, cada ponto de  $R'$  é o antípoda de um ponto de  $R$  e vice-versa. Mais precisamente,  $R = s \cup t$  é a reunião de dois triângulos esféricos com um vértice em comum e  $R' = s' \cup t'$  é a reunião dos triângulos antípodas de  $s$  e  $t$ . Basta, portanto, provar que um triângulo esférico  $t$  e seu antípoda  $t'$  têm a mesma área. Observamos que  $t$  e  $t'$  têm ângulos iguais e lados congruentes, dois a dois, mas  $t$  e  $t'$  não são triângulos congruentes: não é possível, por um movimento rígido, mover um deles no espaço até sobrepor-se exatamente sobre o outro, a menos que  $t$  (e conseqüentemente  $t'$ ) seja isósceles. As figuras abaixo mostram duas tentativas de sobrepor  $t$  e  $t'$ . Numa delas fazem-se coincidir os três vértices. Na outra, coincide-se um ângulo de  $t$  com outro ângulo igual de  $t'$ .

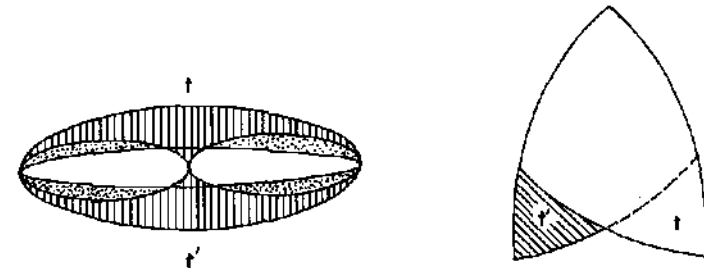


Figura 6.

Na segunda tentativa, observamos que se  $t$  (e portanto  $t'$ ) for isósceles então  $t$  é congruente ao seu antípoda  $t'$ , logo estes dois triângulos esféricos têm a mesma área. No caso geral, procede-se do seguinte modo. Os pontos  $A, B, C$ , vértices de  $t$ , determinam um pequeno círculo e portanto uma calota esférica que contém o triângulo  $t$ . Seja  $P$  o polo dessa calota. ( $P$  é o ponto de interseção da calota com a perpendicular ao plano  $ABC$  tirada pelo centro do círculo.) Os arcos de círculo máximo  $PA, PB$  e  $PC$  têm o mesmo comprimento, logo os triângulos esféricos  $PAB, PBC$  e  $PAC$  são isósceles. Se o polo  $P$  estiver no interior do triângulo  $t = ABC$ , teremos área de  $t = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PBC) + (\text{área de } PAC)$ . Ora, uma construção absolutamente análoga pode ser efetuada com o triângulo antípoda  $t' = A'B'C'$ , decompondo-o como reunião justaposta dos triângulos isósceles  $P'A'B', P'B'C'$  e  $P'A'C'$ , cada um deles antípoda do seu correspondente em  $t$ . Segue-se que área de  $t =$  área de  $t'$ .

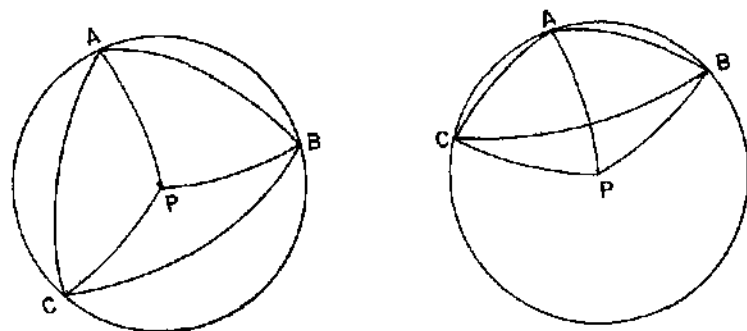


Figura 7. O polo do triângulo  $ABC$  pode estar dentro ou fora de  $ABC$ .

Pode ocorrer, entretanto, que o polo  $P$  esteja situado fora do triângulo  $t$ . Neste caso, área de  $t = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PAC) - (\text{área de } PBC)$ . Uma situação análoga ocorre com  $t'$  e concluímos como antes que área de  $t =$  área de  $t'$ .

Agora podemos demonstrar o teorema de Girard.

**Teorema** Se  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$ , onde  $a$  é a área desse triângulo.

**Demonstração** Consideremos um hemisfério  $H$  que contenha o triângulo

dado. Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam o ângulo  $\alpha$ , até encontrarem o bordo do hemisfério  $H$ , obtemos uma região  $R_\alpha \subset H$ , cuja área mede  $2\alpha \cdot r^2$ , de acordo com o teorema anterior.

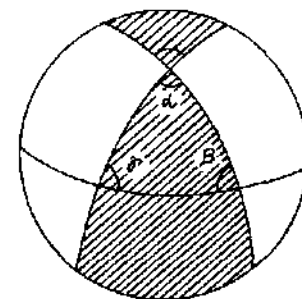


Figura 8. A parte hachurada é a região  $R_\alpha$ .

Fazendo o mesmo com os ângulos  $\beta$  e  $\gamma$ , obtemos regiões  $R_\beta$  e  $R_\gamma$ , cujas áreas medem respectivamente  $2\beta \cdot r^2$  e  $2\gamma \cdot r^2$ . A reunião dessas 3 regiões é o hemisfério  $H$ , com o triângulo dado contado três vezes (duas vezes mais do que devia). Segue-se que a soma das áreas das regiões  $R_\alpha, R_\beta$  e  $R_\gamma$  é igual à área do hemisfério  $H$  mais duas vezes a área  $a$  do triângulo dado, ou seja,  $2\alpha \cdot r^2 + 2\beta \cdot r^2 + 2\gamma \cdot r^2 = 2\pi \cdot r^2 + 2a$ , pois a área de  $H$  é  $2\pi r^2$ . Simplificando, vem  $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$ , como queríamos demonstrar.

A fórmula de Girard mostra que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre superior a dois ângulos retos.

A diferença  $\frac{a}{r^2} = \alpha + \beta + \gamma - (2 \text{ retos})$  é chamada o “excesso esférico”. Para um triângulo de área muito pequena, o excesso esférico é insignificante. Por outro lado, se tomarmos um triângulo esférico na superfície da terra com um lado sobre o equador e um vértice no polo norte, os outros dois lados serão arcos de meridianos, logo dois ângulos serão retos. Se a base for um arco de um quarto do equador, os três ângulos desse triângulo serão todos retos.

O leitor pode imaginar triângulos esféricos com  $\alpha + \beta + \gamma$  tão próximo de 6 ângulos retos quanto ele deseje. Basta tomar os três vértices equidistantes e bem próximos do equador.

Resulta ainda da fórmula de Girard que se  $s$  e  $t$  são triângulos situados

sobre a mesma esfera e os ângulos de  $s$  são iguais aos de  $t$  então  $s$  e  $t$  possuem a mesma área. Na realidade, pode-se provar bem mais: se os ângulos de  $s$  são iguais aos de  $t$  (sempre supondo  $s$  e  $t$  sobre a mesma esfera) então os lados de  $s$  também são iguais aos de  $t$ . Isto é bem diferente da Geometria Plana.

Em particular, não há semelhança de triângulos sobre a mesma esfera, salvo quando a razão de semelhança é igual a 1. Esta última afirmação também pode ser constatada se lembrarmos que dois arcos de círculo semelhantes subtendem o mesmo ângulo central e a razão entre seus comprimentos (igual à razão de semelhança) é a mesma razão entre os raios dos círculos a que pertencem, portanto arcos de grande círculo sobre a mesma esfera só podem ser semelhantes quando têm o mesmo comprimento.

**A** fórmula de Pick é fácil, bonita e divertida. A demonstração que apresentamos a seguir se presta a estudo e discussão em grupo porque, embora completamente elementar, toca em vários pontos de interesse para o ensino do primeiro e segundo grau, como por exemplo:

1. O significado dos coeficientes na equação da reta.
  2. A demonstração de que todo polígono simples de  $n$  lados pode ser decomposto em  $n-2$  triângulos adjacentes por meio de  $n-3$  diagonais e a conseqüente fórmula da soma dos ângulos internos. (Este fato é bem conhecido no caso em que o polígono é convexo, mas é bastante ignorado no caso geral.)
  3. A relação entre a Geometria de figuras numa rede e a teoria dos números primos. (Vide o livro de Honsberg mencionado no texto. Para os mais ambiciosos, ver Hardy e Wright, "Number Theory".)
  4. A fórmula de Euler (novamente!) para "poliedros" planos.
- E, depois de tudo, aquele fato intrigante: não é curioso que todo triângulo fundamental tenha área igual a  $1/2$ ?

# Como Calcular a Área de um Polígono, se Você Sabe Contar

## 1. Introdução

Uma *rede* no plano é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1. Tomando um sistema de coordenadas cartesianas, com origem num ponto da rede, um eixo na direção horizontal e outro na vertical, a rede pode ser descrita como o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas  $(m, n)$  são números inteiros (positivos, negativos, ou zero).

O matemático tcheco G. Pick publicou, em 1899, uma fórmula simples e bonita para a área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede.

**Fórmula de Pick.** *A área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela expressão*

$$\frac{B}{2} + I - 1,$$

onde  $B$  é o número de pontos da rede situados sobre o bordo do polígono e  $I$  é o número de pontos da rede existentes no interior do polígono.

A figura 1 mostra sete polígonos cujas áreas podem facilmente ser calculadas com a fórmula de Pick. O oitavo objeto, formado por dois triângulos de um vértice em comum, não pode ser considerado como um polígono para efeito de utilização desta fórmula, que só se aplica a um polígono *simples* (isto é, cujo bordo é uma poligonal fechada que pode ser percorrida inteiramente sem passar duas vezes pelo mesmo vértice).

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração elementar da fórmula de Pick.

Em tudo o que se segue, suporemos fixada, de uma vez por todas, uma rede no plano.

Por outro lado, não trabalharemos com um sistema de coordenadas fixo. Em cada caso, tomaremos a origem do sistema no ponto da rede que nos for mais conveniente.

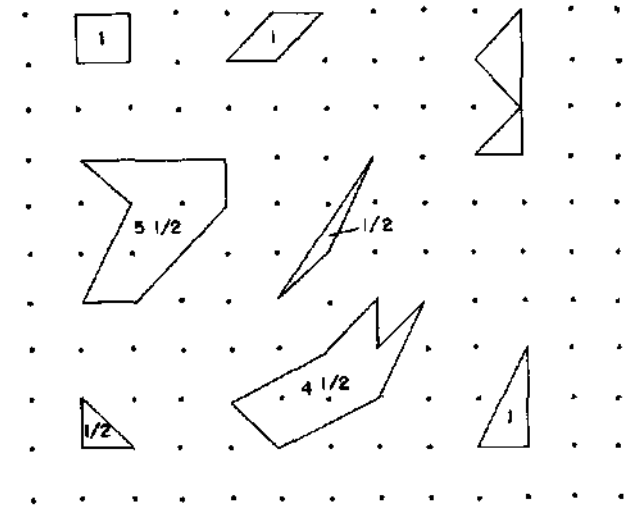


Figura 1.

## 2. Triângulos e paralelogramos fundamentais

Um triângulo chama-se *fundamental* quando tem os três vértices e mais nenhum outro ponto (do bordo ou do interior) sobre a rede. Dois dos três triângulos na Figura 1 são fundamentais.

Analogamente, um paralelogramo diz-se *fundamental* quando os quatro vértices são os únicos dos seus pontos que pertencem à rede. Os dois paralelogramos da Figura 1 são fundamentais.

Evidentemente, qualquer das duas diagonais de um paralelogramo fundamental o decompõe em dois triângulos fundamentais com uma base comum.

Reciprocamente, partindo de um triângulo fundamental  $ABC$ , podemos obter um paralelogramo  $ABCD$  traçando pelo ponto  $C$  uma paralela ao lado  $AB$  e pelo ponto  $B$  uma paralela ao lado  $AC$ , as quais se encontram no ponto  $D$ .

Vale então o

**Teorema 1.** *Se  $ABC$  é um triângulo fundamental então  $ABCD$  é um*

*paralelogramo fundamental.*

**Demonstração:** Tendo como origem o ponto  $A(0,0)$ , consideremos um sistema de coordenadas cartesianas no plano, em relação ao qual os pontos de uma rede têm coordenadas inteiras. Sejam  $B(m,n)$  e  $C(s,t)$  as coordenadas dos outros dois vértices do triângulo  $ABC$ . Então o quarto vértice do paralelogramo terá coordenadas  $D(m+s, n+t)$ .

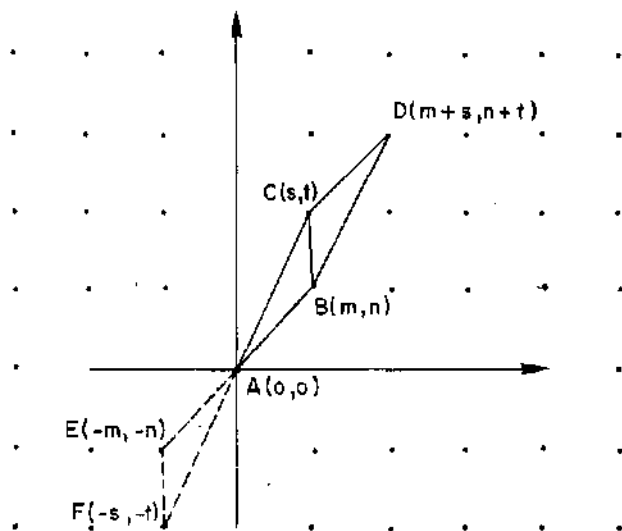


Figura 2.

O triângulo  $AEF$ , cujos vértices são

$$A(0,0), E(-m,-n) \text{ e } F(-s,-t)$$

é obtido trocando-se os sinais de ambas as coordenadas de cada ponto do triângulo  $ABC$ . Logo  $AEF$  não contém outro ponto com coordenadas inteiras além dos seus vértices, isto é,  $AEF$  é fundamental. O triângulo  $BCD$  é formado pelos pontos  $P'(x+m+s, y+n+t)$ , obtidos somando-se  $m+s$  à abscissa e  $n+t$  à ordenada de um ponto arbitrário  $P(x,y)$  do triângulo  $AEF$ . Se  $P'$  tem coordenadas inteiras,  $P$  também tem. Como  $AEF$  é fundamental, o mesmo se dá com  $BCD$ . Assim, os únicos pontos com coordenadas inteiras no paralelogramo  $ABCD$  são os vértices, ou seja,  $ABCD$  é fundamental.

Observemos, em seguida, que se o paralelogramo  $ABCD$  é fundamental então não há pontos da rede entre as retas paralelas  $AB$  e  $CD$ .

Com efeito, a região compreendida entre essas paralelas é uma reunião de paralelogramos justapostos, congruentes a  $ABCD$ . Cada um desses paralelogramos é fundamental porque resulta de  $ABCD$  somando-se inteiros fixados à abscissa e à ordenada de cada um dos seus pontos.

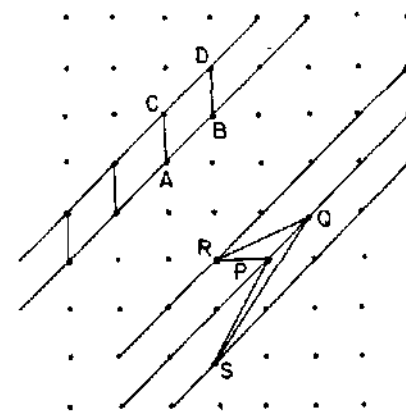


Figura 3.

A observação anterior pode ser invertida, e utilizada como método para gerar triângulos e paralelogramos fundamentais.

Se  $PQ$  é um segmento de reta que não contém outros pontos da rede além dos vértices  $P$  e  $Q$ , consideremos as retas paralelas a  $PQ$  que contenham pontos da rede. Dentre elas selecionemos as duas (uma em cada lado) mais próximas da reta  $PQ$ . Qualquer triângulo que tenha por vértices  $P, Q$  e mais um ponto da rede situado sobre uma dessas retas é um triângulo fundamental. (Como os triângulos  $PQR$  e  $PQS$  na figura 3.) Por exemplo,  $PQR$  é fundamental porque se um ponto da rede, diferente de  $P, Q$  e  $S$ , pertencesse a esse triângulo, tal ponto estaria mais próximo da reta  $PQ$  do que o vértice  $R$ .

Também todo paralelogramo que tenha como lados o segmento  $PQ$  e qualquer outro segmento do mesmo comprimento, situado sobre uma dessas retas paralelas mais próximas da reta  $PQ$  é um paralelogramo fundamental.

O teorema abaixo estabelece o caso mais simples da fórmula de Pick.

**Teorema 2.** *A área de um triângulo fundamental é igual a  $1/2$ .*

**Demonstração:** Sejam  $A(0,0)$  e  $B(m,n)$  as coordenadas (inteiras) dos dois primeiros vértices do triângulo fundamental  $ABC$ . Mostremos,

inicialmente, que  $m$  e  $n$  são primos entre si. Com efeito, se  $d > 1$  fosse um divisor comum de  $m$  e  $n$ , o ponto  $P(m/d, n/d)$  estaria na rede e no interior do segmento de reta  $AB$  (veja Figura 4), logo  $ABC$  não seria fundamental.

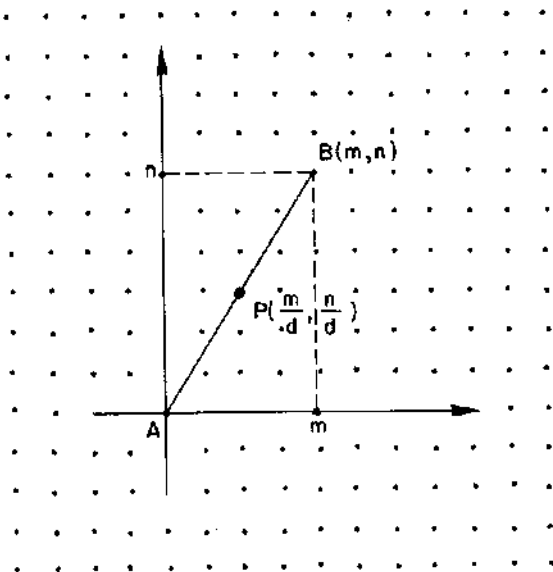


Figura 4.

Suponhamos  $m \neq 0$ . A equação da reta que passa pelo ponto  $C$  e é paralela a  $AB$  é  $y = (n/m)x + b$ , onde  $b$  é a ordenada do ponto  $D(0, b)$  no qual a reta corta o eixo vertical. Todos os triângulos que têm  $AB$  como base e cujo terceiro vértice está sobre essa reta têm a mesma área que  $ABC$ . Em particular área  $ABC = \text{área } ABD = |bm|/2$ , pois  $|b|$  é a medida da base e  $|m|$  da altura de  $ABC$ . Resta-nos então provar que  $|b| = 1/|m|$ .

Para isto consideremos, mais geralmente, a equação  $y = (n/m)x + \beta$  de qualquer reta paralela a  $AB$ . Sabemos que  $\beta$  é a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo vertical. Se a reta passa por algum ponto da rede com coordenadas  $(s, t)$  então  $t = (n/m)s + \beta$ , donde

$$\beta = t - \frac{n}{m}s = \frac{tm - sn}{m}.$$

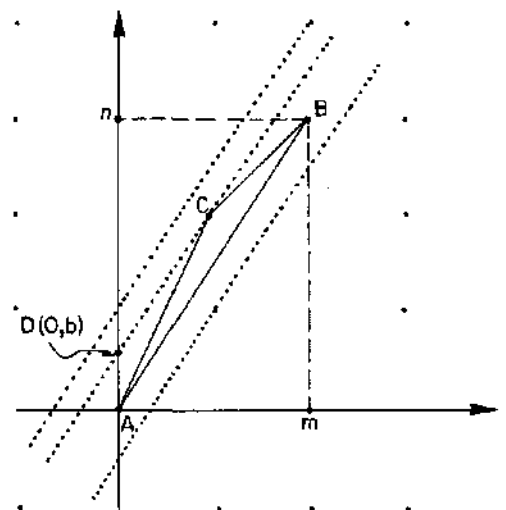


Figura 5.

Dentre estas retas, nenhuma está mais próxima da reta  $AB$  do que a que passa pelo ponto  $C$ , para a qual temos  $\beta = b$ . Logo  $|b|$  é o menor valor positivo que  $|\beta|$  pode assumir. Por outro lado, como  $m$  e  $n$  são primos entre si, o lema abaixo nos assegura que existem inteiros  $s, t$  tais que  $tm - sn = 1$ . Portanto  $1/|m|$  é o menor valor positivo de  $|\beta|$ , donde  $|b| = 1/|m|$ .

Para completar a demonstração, falta considerar o caso  $m = 0$ . Mas  $m = 0$  obriga  $n = \pm 1$  e  $ABC$  é um triângulo retângulo, metade de um dos quadrados da rede, logo sua área é  $1/2$ .

**Corolário.** A área de um paralelogramo fundamental é igual a 1.

**Lema.** Se os inteiros  $m, n$  são primos entre si então existem inteiros  $s, t$  tais que  $tm - sn = 1$ .

**Demonstração:** Escolhamos inteiros  $s, t$  tais que  $p = tm - sn$  seja positivo. Mostraremos que se  $p$  for maior do que 1 então podemos modificar os inteiros  $s, t$  de modo que a expressão  $tm - sn$  assumo um valor positivo menor do que  $p$ . Com efeito, sendo  $m, n$  primos entre si, pelo menos um deles, digamos  $m$ , não é divisível por  $p$ , isto é,  $m = pq + r$ , com  $0 < r < p$ . O inteiro  $r' = p - r$  também cumpre a condição  $0 < r' < p$ .

Além disso,  $r = p - r'$ , logo

$$m = pq + r = pq + p - r' = p(q + 1) - r'.$$

Dai:

$$t(q + 1)m - s(q + 1)n = p(q + 1) = m + r',$$

ou seja:

$$(tq + t - 1)m - (sq + s)n = r', \text{ com } 0 < r' < p.$$

Repetindo o processo tantas vezes quantas sejam necessárias, chegaremos a inteiros  $s, t$  tais que  $tm - sn = 1$ .

### 3. Decomposição de um polígono

É fácil decompor um polígono convexo de  $n$  lados numa reunião de  $n - 2$  triângulos justapostos, sem acrescentar novos vértices: basta selecionar um vértice do polígono e, a partir dele, traçar as  $n - 3$  diagonais que o ligam aos vértices não-adjacentes.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 2 retos e cada ângulo interno  $A$  do polígono convexo é a soma dos ângulos dos triângulos da decomposição que têm o vértice  $A$ , segue-se que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados é igual a  $n - 2$  vezes dois ângulos retos.

Indicando a medida de um ângulo reto com o símbolo  $\pi/2$  (o que equivale a tomar o radiano como unidade de ângulo) temos então a fórmula  $S = (n - 2)\pi$  para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de  $n$  lados.

É natural indagar se a mesma fórmula vale para um polígono não convexo  $P$ .

A demonstração acima não se aplica porque se, a partir de um vértice arbitrário de  $P$ , traçarmos segmentos de reta ligando este vértice aos demais, tais segmentos poderão cortar o bordo de  $P$  uma ou várias vezes, poderão estar parcial ou inteiramente no exterior de  $P$  e, assim sendo, poderão não decompor  $P$  numa reunião de triângulos justapostos.

Mesmo assim, a resposta a essa indagação é afirmativa, conforme mostraremos agora.

Antes, porém, repitamos uma advertência feita na seção 1: os polígonos aqui considerados são todos *simples*, isto é, o bordo é uma linha

poligonal fechada, que pode ser percorrida inteiramente sem que, durante o percurso, se passe mais de uma vez pelo mesmo vértice.

Trataremos, neste parágrafo, da decomposição de um polígono em triângulos adjacentes e da soma dos ângulos internos de um polígono. No caso em que os vértices são pontos de uma rede, mostraremos que o polígono pode ser expresso como reunião de triângulos fundamentais. Desta maneira, poderemos fazer a demonstração da fórmula de Pick recair no caso particular resolvido pelo Teorema 2 acima.

No enunciado do Teorema 3, "justapostos" significa que dois quaisquer desses triângulos não possuem pontos interiores em comum.

**Teorema 3.** *Todo polígono de  $n$  lados pode ser decomposto como reunião de  $n - 2$  triângulos justapostos, cujos vértices são vértices do polígono dado.*

**Demonstração:** Supondo, por absurdo, que existam polígonos para os quais o teorema não é verdadeiro, seja  $n$  o menor número natural tal que existe um polígono  $P$ , com  $n$  lados, o qual não pode ser decomposto conforme estipula o enunciado acima. Tomemos no plano um sistema de coordenadas cartesianas de modo que nenhum lado do polígono seja paralelo ao eixo das ordenadas. Seja  $A$  o ponto de maior abscissa (bordo do) polígono  $P$ . Como nenhum lado de  $P$  é vertical,  $A$  deve ser um vértice. Sejam  $B$  e  $C$  os vértices adjacentes a  $A$ . Há 2 possibilidades.

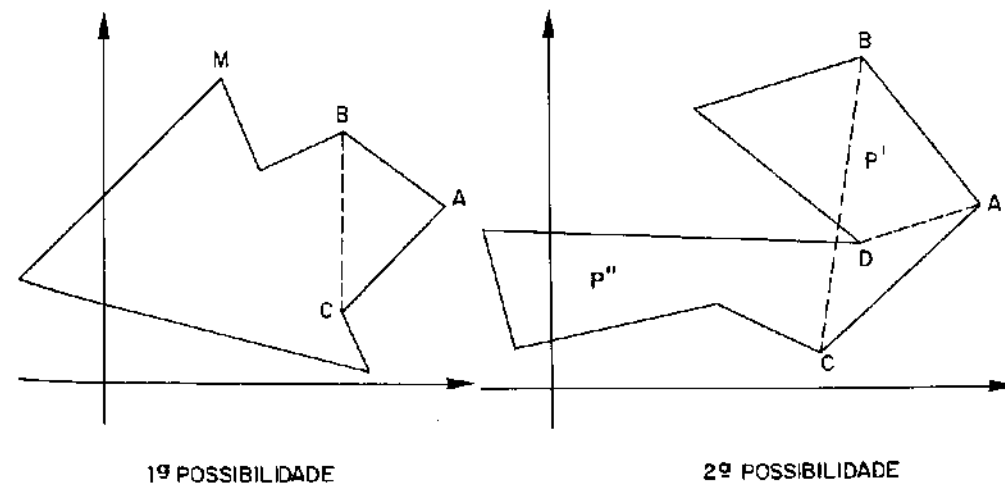


Figura 6.

**Primeira:** o triângulo  $ABC$  não contém outros vértices de  $P$ , além de  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Neste caso, o polígono  $P'$ , obtido de  $P$  quando se substituem os lados  $AB$  e  $AC$  por  $BC$ , tem  $n - 1$  lados. Como  $n$  é o menor número de lados para o qual o teorema é falso,  $P'$  pode ser decomposto em  $n - 3$  triângulos na forma do enunciado. Juntando o triângulo  $ABC$  a essa decomposição, vemos que o teorema é verdadeiro para  $P$ , o que é uma contradição.

**Segunda:** o triângulo  $ABC$  contém, além de  $A$ ,  $B$  e  $C$ , algum outro vértice do ponto  $P$ . Dentre esses, seja  $D$  o mais distante do lado  $BC$ . Então o segmento de reta  $AD$  decompõe  $P$  em dois polígonos  $P'$  e  $P''$ , o primeiro com  $n'$  e o segundo com  $n''$  lados, sendo  $n' + n'' = n + 2$ . Como  $n' \geq 3$  e  $n'' \geq 3$ , vemos que  $n'$  e  $n''$  são ambos menores do que  $n$ . O teorema então vale para  $P'$  e  $P''$ , que podem ser decompostos, respectivamente, em  $n' - 2$  e  $n'' - 2$  triângulos, na forma do enunciado. Justapondo essas decomposições ao longo de  $AD$ , obtemos uma decomposição de  $P$  em  $(n' - 2) + (n'' - 2) = n - 2$  triângulos, o que é uma contradição. Isto completa a demonstração do teorema.

**Corolário.** A soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados é igual a  $(n - 2) \cdot \pi$ .

**Observação:** Os lados dos triângulos que fornecem a decomposição do polígono  $P$  no Teorema 3, ou são lados de  $P$  ou são diagonais (segmentos de reta que ligam dois vértices do polígono). Mas não são diagonais quaisquer: estão contidas no interior de  $P$ . É interessante notar que essas diagonais, embora não se originem no mesmo vértice, são, como no caso de polígonos convexos, em número de  $n - 3$ . Isto pode ser verificado do seguinte modo. São  $n - 2$  triângulos, cada um com 3 lados, logo há  $3n - 6$  lados no total. Destes,  $n$  são lados do polígono e  $x$  são diagonais. Mas cada diagonal é lado de dois triângulos, logo foi contada 2 vezes quando se obteve  $3n - 6$ . Portanto  $3n - 6 = n + 2x$ . Resolvendo esta equação, obtemos  $x = n - 3$ , que é o número de diagonais necessárias para decompor um polígono de  $n$  lados em  $n - 2$  triângulos justapostos.

**Teorema 4.** Todo polígono cujos vértices pertencem a uma rede pode ser decomposto numa reunião de triângulos fundamentais.

**Demonstração:** Em vista do Teorema 3, basta considerar o caso em que o polígono dado é um triângulo  $ABC$  que contém  $n$  pontos da rede

(no interior ou no bordo). Se existir realmente algum ponto  $P$  da rede no interior do triângulo, traçamos segmentos de reta ligando esse ponto aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  e deste modo decomparamos  $ABC$  em três triângulos, cada um contendo um número  $< n$  de pontos da rede. Se houver pontos da rede sobre os lados da  $ABC$ , escolhemos um deles, digamos sobre  $AB$ , e o ligamos ao vértice  $C$ . Assim decomparamos  $ABC$  em 2 triângulos, cada um contendo um número  $< n$  de pontos da rede. Prosseguindo desta maneira, com um número finito de etapas chegaremos a uma decomposição de  $ABC$  em triângulos fundamentais.

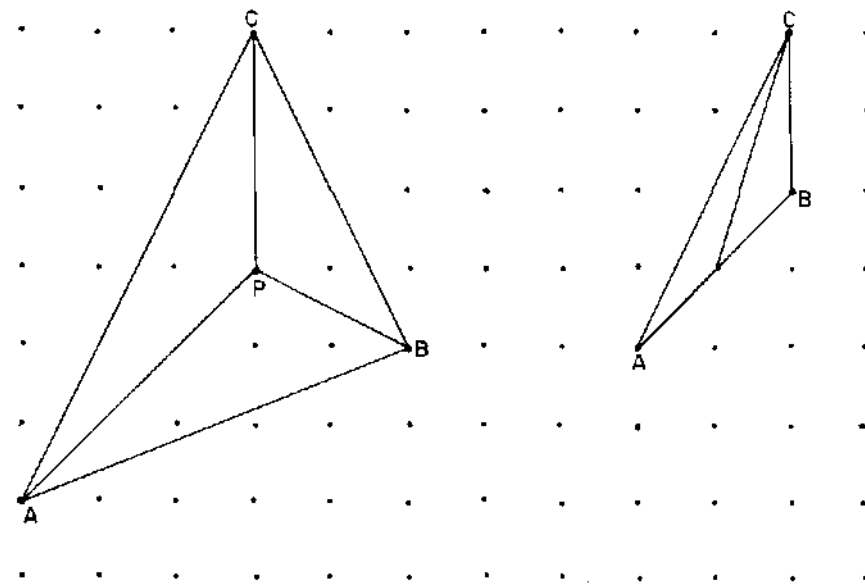


Figura 7.

#### 4. Demonstração da fórmula de Pick

Seja  $P$  um polígono cujos vértices pertencem a uma rede. Indiquemos com  $B$  e  $I$ , respectivamente, o número de pontos da rede situados sobre o bordo e no interior de  $P$ .

Para provar que  $B/2 + I - 1$  é a área do polígono  $P$ , basta mostrar que o número  $T$  de triângulos fundamentais da decomposição de  $P$  (dada pelo Teorema 4) é igual a  $B + 2I - 2$ , pois a área de  $P$  é igual a  $T/2$ , em virtude do Teorema 2.

Imitaremos o argumento usado para provar o Teorema de Euler no

caso de poliedros convexos. Noutras palavras, vamos calcular a soma dos ângulos internos dos  $T$  triângulos fundamentais que compõem o polígono  $P$ :

Podemos chegar a essa soma por dois caminhos.

O primeiro é evidente: se há  $T$  triângulos, a soma dos seus ângulos internos é igual a  $T \cdot \pi$ .

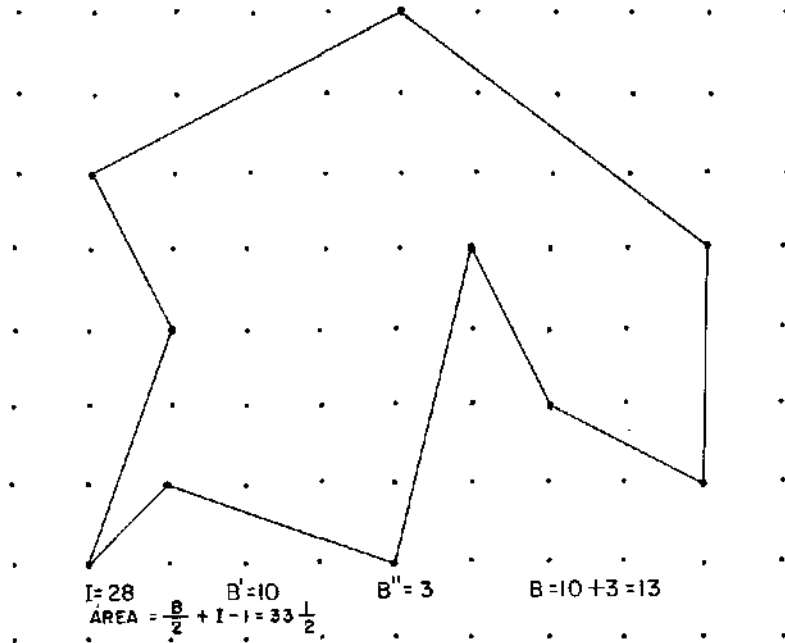


Figura 8.

O segundo consiste em calcular separadamente a soma  $S_b$  dos ângulos que têm vértice no bordo e a soma  $S_i$  dos ângulos cujos vértices estão no interior de  $P$ . Sejam  $B'$  o número de vértices de  $P$  e  $B''$  o número de pontos da rede que estão sobre o bordo de  $P$  mas não são vértices. Então  $B = B' + B''$ . Evidentemente,  $S_b$  é igual à soma  $(B' - 2)\pi$  dos ângulos internos de  $P$  mais  $B'' \cdot \pi$  (pois os ângulos dos triângulos fundamentais, com vértice em cada um dos  $B''$  pontos do bordo de  $P$  que não são vértices de  $P$ , somam um ângulo raso, ou seja,  $\pi$ ). Logo  $S_b = (B' - 2)\pi + B'' \cdot \pi = (B - 2)\pi$ . Por outro lado, em cada ponto da rede interior a  $P$ , os ângulos que têm como vértice somam quatro retos, logo  $S_i = 2I \cdot \pi$ . Portanto  $S_b + S_i = (B - 2 + 2I)\pi$ .

Comparando as duas contagens, vem:  $T \cdot \pi = (B + 2I - 2)\pi$ , ou seja,  $T = B + 2I - 2$ , como queríamos demonstrar.

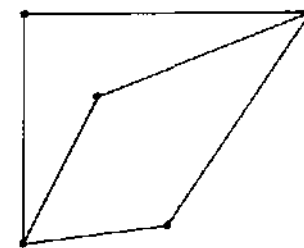
### 5. O teorema de Euler para polígonos (“poliedros planos”)

O argumento de somar os ângulos internos dos triângulos serve para estabelecer uma versão do teorema de Euler válida no plano. Como tal versão não foi abordada nas ocasiões em que se tratou desse teorema antes, talvez seja interessante prová-la agora.

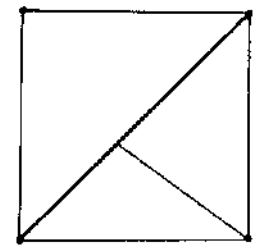
Temos um polígono (simples)  $P$ , decomposto numa reunião de polígonos menores, que chamaremos “as faces de  $P$ ”, em analogia com o caso de um poliedro. Cada lado de uma dessas “faces” será chamado “aresta”. As letras  $F, A$  e  $V$  indicarão, respectivamente, o número de faces, o número de arestas e o número de vértices da decomposição de  $P$ .

A fórmula de Euler para polígonos se escreve como  $F - A + V = 1$ .

Para que esta relação seja válida, é preciso supor que a decomposição de  $P$  cumpra uma certa condição de regularidade, que é a seguinte: duas faces quaisquer da decomposição, ou são disjuntas, ou têm um vértice em comum, ou têm uma ou mais arestas (inteiras!) em comum. (Por exemplo, na Figura 9 abaixo, a decomposição da esquerda é permitida, mas a da direita não.) Nestas condições, cada aresta da decomposição pertence a uma ou a duas faces, conforme seja um lado do polígono  $P$  ou uma aresta interior. Por simplicidade, um polígono  $P$  munido de uma decomposição nessas condições será chamado um *poliedro plano*.



UM POLIEDRO PLANO



DECOMPOSIÇÃO INACEITÁVEL

Figura 9.

Dado um poliedro plano  $P$ , se decomposermos cada uma de suas faces como reunião de triângulos, sem acrescentar novos vértices, na forma do Teorema 3, os números  $F$  e  $A$  se alterarão,  $V$  permanecerá com o mesmo valor. Com efeito, quando se acrescenta uma nova aresta, cada um dos números  $F$  e  $A$  aumenta de uma unidade, logo esses aumentos se cancelam em  $F - A + V$ .

Por conseguinte, para efeito do cálculo da expressão  $F - A + V$ , não há perda de generalidade em supor que as faces do poliedro plano  $P$  são todas triângulos, o que admitiremos a partir de agora.

Escrevamos  $V = V_i + V_b$ , onde  $V_i$  é o número de vértices interiores e  $V_b$  o número de vértices sobre o bordo de  $P$ . Calculando a soma dos ângulos internos dos triângulos que constituem as faces de  $P$  obtemos, como no parágrafo anterior, a relação  $F = V_b + 2V_i - 2$ , ou seja,  $F = 2V - V_b - 2$ .

Cada face de  $P$  tem 3 arestas, cada aresta interior é lado de 2 faces e cada aresta do bordo é lado de 1 face. Considerando que o número de arestas do bordo é igual ao número  $V_b$  de vértices desse mesmo bordo, temos  $3F = 2A - V_b$ .

Subtraindo membro a membro as igualdades  $3F = 2A - V_b$  e  $F = 2V - V_b - 2$ , obtemos  $2F = 2A - 2V + 2$ , ou seja  $F - A + V = 1$ , que é o teorema de Euler para "poliedros planos".

## 6. Comentários finais

A fórmula de Pick, publicada pela primeira vez num obscuro periódico tcheco, foi divulgada por H. Steinhaus em seu livro "Mathematical Snapshots" (Oxford Univ. Press, N. York, 1950). Desde então, várias demonstrações dessa fórmula têm sido publicadas em revistas americanas dedicadas ao ensino da Matemática. Podemos mencionar o American Mathematical Monthly de 1967 (pag. 1195), 1974 (pag. 647), 1985 (pag. 584), a Mathematics Magazine de 1976 (pag. 35) e The Mathematics Teacher de 1974 (pag. 222). Ver também o livro "Ingenuity in Mathematics", por R. Honsberg, N. York, 1970.

**A** desigualdade  $MG \leq MA$ , entre a média geométrica e a média aritmética, é uma das mais populares da Matemática. Sua concorrente mais próxima é a desigualdade de Cauchy-Schwarz que, na forma mais elementar, afirma ser

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

para quaisquer números reais  $x_1, \dots, x_n$ , valendo a igualdade se, e somente se,  $x_1/y_1 = x_2/y_2 = \dots = x_n/y_n$ .

Mas há uma diferença crucial entre as duas desigualdades. A de Cauchy-Schwarz tem uma demonstração consagrada, que se baseia nos fatos de que toda soma de quadrados é  $\geq 0$  e de que um trinômio do segundo grau que nunca muda de sinal tem discriminante  $\leq 0$ . Por outro lado, a desigualdade  $MG \leq MA$  é, há muito tempo, conhecida pela grande variedade de demonstrações que lhe são dadas.

O artigo seguinte traz sete demonstrações dessa desigualdade no caso da média entre dois números, com ênfase na interpretação geométrica. Em seguida, o caso  $n=2$  é utilizado para provar a desigualdade geral, quando  $n$  é qualquer. São expostas quatro provas neste caso. É salientada a equivalência entre a desigualdade  $MG \leq MA$  e a proposição segundo a qual se  $n$  números positivos têm soma constante, seu produto é máximo quando eles são todos iguais.

Para manter a exposição em nível elementar, não mencionei duas demonstrações da desigualdade  $MG \leq MA$  que estão entre as minhas preferidas. Uma se baseia na convexidade da função exponencial. (V. meu "Curso de Análise", vol. 1, 7ª edição, página 237.) A outra usa o método do multiplicador de Lagrange. ("Curso de Análise", vol. 2, página 173.)

Encerrando estes comentários, gostaria de dar exemplo de uma aplicação interessante da desigualdade  $MG \leq MA$ . Na definição do número "e" como limite da seqüência  $x_n = (1 + 1/n)^n$  há o problema de assegurar que esta seqüência converge. É fácil mostrar que  $x_n \leq 3$  para todo  $n$  mas, em geral, é trabalhoso verificar que  $x_n < x_{n+1}$ . Um modo elegante de fazer isto é aplicar nossa desigualdade ao caso em que se tomam  $n+1$  números, dos quais os  $n$  primeiros são iguais a  $1+1/n$  e o último é igual a 1.

## Fazendo Médias

Em 1985, o governo decidiu que a correção monetária a ser utilizada mensalmente para reajustar os salários e depósitos em cadernetas de poupança seria tomada como a média geométrica das taxas de inflação dos três meses anteriores. Poucos anos antes, no governo anterior, um diretor do IBGE se demitira por não concordar com a ordem de usar a média geométrica em vez da aritmética (de 2 meses apenas) em situação análoga.

Por que essa preocupação em torno de um processo ou outro de média, a ponto de custar a alguém seu emprego? Sendo a média geométrica (principalmente para mais de dois números) bem mais difícil de calcular do que a média aritmética, por que essa preferência comum de dois governos tão antagônicos? Mero desejo de complicar a vida do cidadão?

Complicar, exatamente, não. Quer dizer: não somente. Tirar-nos mais dinheiro, sim. De que modo?

A *média aritmética*  $A$  e a *média geométrica*  $G$  dos números positivos  $x_1, \dots, x_n$  são definidas pelas igualdades

$$A = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad \text{e} \quad G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Por exemplo, a média aritmética de 4 e 9 é  $A = \frac{4+9}{2} = 6,5$  enquanto a média geométrica é  $G = \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = 6$ . Se os números dados forem 2, 5 e 100 teremos  $A = 35\frac{2}{3}$  e  $G = 10$ .

Para fazermos jus aos seus nomes, as médias aritmética e geométrica estão compreendidas entre o menor e o maior dos números dados. Mas, como se nota nos exemplos acima, a média aritmética parece ser sempre maior do que a geométrica. No segundo exemplo, a diferença entre uma e outra é bem grande. Se esta desigualdade for um fato geral, entenderemos a preferência pela média geométrica, quando se trata de nos pagarem.

Será que a média geométrica é, em todos os casos, menor do que a aritmética? Bem, há pelo menos um exemplo em que as duas coincidem. É quando os números dados são todos iguais. Neste caso, qualquer média

que se tome (há outras, além das duas que estamos considerando) tem sempre o mesmo valor: é igual aos números que são propostos. Esta é, porém, a única exceção. Se os números positivos  $x_1, \dots, x_n$  não forem todos iguais, tem-se  $G < A$  sempre.

Como se prova isto?

A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica é um dos resultados mais demonstrados da Matemática. (Mas não tanto quanto o Teorema de Pitágoras.) Há demonstrações de vários tipos, de diversos graus de sofisticação e baseadas em diferentes teorias.

Este assunto, que cremos ser interessante para os nossos leitores, pode ser tratado de forma elementar. Começaremos com o caso mais simples, de dois números.

### 1. Médias de dois números

Quando  $x$  e  $y$  são números positivos, a desigualdade  $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$  pode ser provada facilmente, de muitos modos. Em cada caso, ficará claro que  $\sqrt{xy} = (x+y)/2$  se, e somente se,  $x = y$ . Enumeremos as demonstrações que daremos aqui (ao todo, sete).

**Primeira** Como  $(x+y)/2 - \sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2/2$ , vemos que o primeiro membro é  $\geq 0$ , sendo zero se, e somente se,  $x = y$ , pois o quadrado de um número real não pode ser negativo. Portanto  $(x+y)/2 \geq \sqrt{xy}$ .

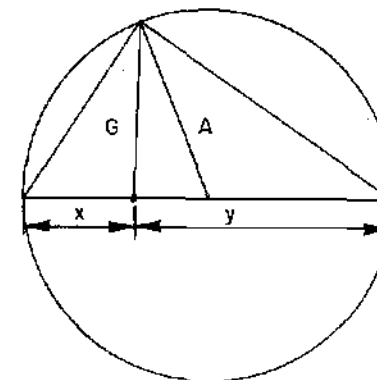


Figura 1.

**Segunda** Dados  $x > 0$  e  $y > 0$ , construímos um círculo cujo diâmetro é  $x+y$ . Seu raio será  $A = (x+y)/2$ . Segundo reza Euclides (de

Alexandria), “em todo triângulo retângulo, a altura baixada do vértice do ângulo reto sobre a hipotenusa é média geométrica entre os segmentos que ela determina sobre essa hipotenusa”. Sabemos também que todo triângulo inscrito num círculo, tendo o diâmetro como um dos seus lados, é um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é o referido diâmetro. Na figura acima,  $G$  é a altura do triângulo,  $A$  é a mediana e daí  $G \leq A$ . A igualdade ocorre quando a altura e a mediana coincidem, logo  $x = y$ .

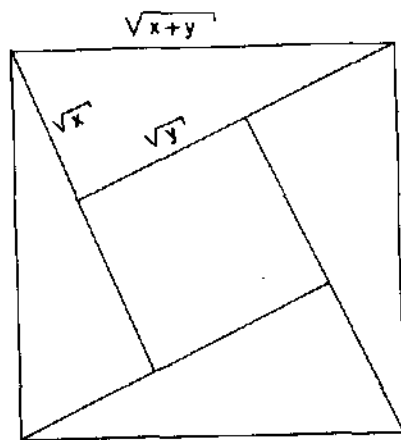


Figura 2.

**Terceira** Forme um quadrado de lado  $\sqrt{x+y}$  justapondo quatro triângulos retângulos congruentes, cada um deles tendo catetos  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{y}$  e hipotenusa  $\sqrt{x+y}$ . (O Teorema de Pitágoras garante que, sendo  $\sqrt{x}$  e  $\sqrt{y}$  os catetos, a hipotenusa deve medir  $\sqrt{x+y}$ .) A área do quadrado,  $x+y$ , é maior do que ou igual a quatro vezes a área de cada triângulo. Logo  $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ , ou seja,  $A \geq G$ . Tem-se igualdade somente quando desaparece o quadrado do miolo. Como o lado desse quadrado é  $\sqrt{y} - \sqrt{x}$ , segue-se que  $A = G$  somente quando  $x = y$ .

**Quarta** Fixemos dois pontos  $A, B$  num círculo. Fazendo variar o ponto  $C$  sobre o arco  $AB$ , obtemos triângulos  $ABC$ , todos com a mesma base e alturas variáveis. Dentre eles, o que tem maior altura é o isósceles  $AC_0B$ , logo este é o de maior área.

Em particular, quando  $AB$  é diâmetro, todos os triângulos  $ACB$  são retângulos. Se os catetos são  $\sqrt{x}$ ,  $\sqrt{y}$  no caso geral e  $\sqrt{z}$  no caso

isósceles, comparando as áreas dos triângulos obtemos  $\sqrt{xy} \leq z$  mas, pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que o diâmetro do círculo é  $\sqrt{x+y}$  e que  $2z = x+y$ , ou seja  $z = \frac{x+y}{2}$ . Logo  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ .

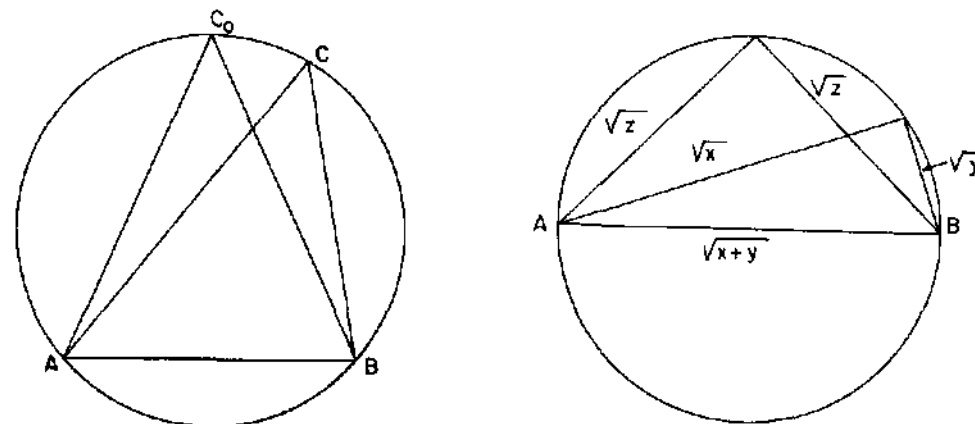


Figura 3.

A desigualdade  $G \leq A$  é equivalente à afirmação seguinte:

Entre todos os números positivos  $x, y$  que têm soma constante  $x+y = 2c$ , o produto  $xy$  é máximo quando  $x = y = c$ .

Com efeito, a afirmação acima equivale a dizer que  $xy \leq c^2$  quando  $x+y = 2c$ , ou seja, que  $xy \leq [(x+y)/2]^2$ , o que significa  $\sqrt{xy} \leq (x+y)/2$ .

Além disso, a afirmação de que  $G = A$  implica  $x = y$  equivale a dizer que, quando  $x+y = 2c$  e  $xy = c^2$ , tem-se  $x = y = c$ . Podemos então obter novas demonstrações da desigualdade  $G \leq A$ , usando essa equivalência.

**Quinta** Se  $x+y = 2c$ , podemos escrever  $x = c-d$  e  $y = c+d$  logo  $xy = (c-d)(c+d) = c^2 - d^2$ , donde  $xy \leq c^2$ , valendo a igualdade somente quando  $d = 0$ , isto é,  $x = y$ .

**Sexta** Se  $x+y = 2c$  então  $x$  e  $y$  são as raízes da equação do segundo grau  $z^2 - 2cz + xy = 0$ . Como tais raízes são reais, o discriminante desta equação é  $\geq 0$ , ou seja  $4c^2 - 4xy \geq 0$ , donde  $xy \leq c^2$ . As raízes são iguais se, e somente se, o discriminante é zero, ou seja,  $xy = c^2$ .

**Sétima** Se  $x+y = 2c$ , comparamos as áreas do quadrado de lado  $c$  e do

retângulo de lados  $x, y$ , (Figura 4.) onde  $x \leq y$ .

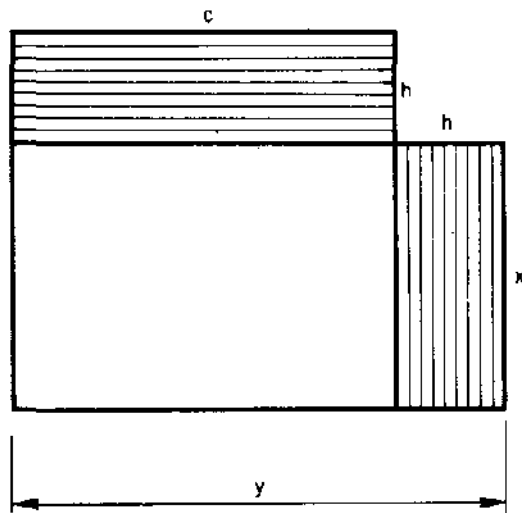


Figura 4.

Como a área do retângulo hachurado verticalmente é menor do que a área do hachurado horizontalmente, concluímos que  $xy \leq c^2$ , valendo a igualdade somente quando  $x = y$ .

**Exercício:** Prove que se  $x > 0$  e  $y > 0$ , a soma  $\sqrt{y/x} + \sqrt{x/y}$  assume seu valor mínimo, igual a 2; quando  $x = y$ .

## 2. Médias com vários números

Sejam  $x_1, \dots, x_n$  números reais positivos. A desigualdade  $G \leq A$  equivale a afirmar que, quando a soma  $x_1 + \dots + x_n = n \cdot c$  é constante, o produto  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$  é máximo no caso em que  $x_1 = \dots = x_n = c$  (e portanto o produto vale  $c^n$ ).

A afirmação adicional de que  $G = A$  implica  $x_1 = \dots = x_n$  equivale a dizer que  $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = c^n$  somente quando todos os fatores  $x_i$  forem iguais a  $c$  (desde que a soma dos  $x_i$  seja  $nc$ ).

Uma maneira de provar a desigualdade  $G \leq A$  para  $n$  números  $x_1, \dots, x_n$  consiste em substituir o menor desses números (digamos  $x$ ) e o maior deles (digamos  $y$ ) pelos números  $G$  e  $xy/G$ , mantendo os  $n - 2$  números restantes inalterados. Como  $G \cdot xy/G = xy$ , a média geométrica

dos novos números continua igual a  $G$ . Mas, como  $x \leq G \leq y$ , segue-se que

$$x + y - \left(G + \frac{xy}{G}\right) = x + y - G - \frac{xy}{G} = (x - G) \left(1 - \frac{y}{G}\right) \geq 0,$$

logo,  $x + y \geq G + xy/G$ . Portanto, ao fazer a substituição, a nova média aritmética é menor do que ou igual à anterior. Só é igual quando  $x = G$  ou  $y = G$ , em cujo caso todos os números dados são iguais. Prosseguindo, sejam agora  $u$  e  $v$ , respectivamente, o menor e o maior dos novos números. Substituindo-os por  $G$  e  $uv/G$ , novamente não alteramos a média geométrica, que ainda é igual a  $G$ , mas a média aritmética mais uma vez fica menor ou igual. Depois desta segunda etapa, pelo menos dois dos números tornaram-se iguais a  $G$ . Depois de no máximo  $n$  etapas, obtemos  $n$  números iguais a  $G$ . Sua média geométrica é  $G$  e sua média aritmética também. Mas, como esta última não aumentou depois de nenhuma das modificações feitas, concluímos que  $G \leq A$ . Só se tem  $G = A$  quando, em todas as etapas do processo, a média aritmética se mantiver invariável. Como vimos, isto só ocorre se todos os  $x_i$  forem iguais.

Outra demonstração de que  $G \leq A$  se faz de modo semelhante ao anterior, por etapas, usando  $A$  em vez de  $G$ . Em cada etapa, substituímos o menor e o maior dos números dados (digamos  $x$  e  $y$ ) por  $A$  e  $x + y - A$ . Com esta troca, a média aritmética  $A$  permanece invariante mas a média geométrica aumenta pois  $(x + y - A)A - xy = xA + yA - A^2 - xy = (x - A)(A - y) \geq 0$ . Bem, a nova média geométrica pode ser igual à anterior, mas isto só acontece se  $x = A$  ou se  $y = A$ . Neste caso, todos os números dados eram iguais a  $A$ . Seja como for, depois de no máximo  $n$  etapas chegamos a  $n$  números iguais a  $A$ , cuja média geométrica é  $G$ . Logo  $A \geq G$ .

Há também uma demonstração que consiste em argumentar do seguinte modo: se os números positivos  $x_1, \dots, x_n$  não forem todos iguais então pelo menos dois deles, digamos  $x$  e  $y$ , são diferentes. Então  $xy < [(x + y)/2]^2$ . Portanto, se substituirmos  $x$  e  $y$  por  $(x + y)/2$  e  $(x + y)/2$  obteremos novos números com a mesma soma anterior porém com produto maior. Isto significa que, quando a soma  $x_1 + \dots + x_n = nc$  é constante, o produto  $x_1 x_2 \dots x_n$  não pode atingir seu valor máximo, a menos que todos os fatores sejam iguais. Alguns autores concluem que o valor máximo do produto é obtido quando  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = c$ .

Este ponto é um tanto ou quanto sutil. Na realidade, o que este argumento prova é que, se houver um valor máximo para o produto, tal valor máximo deve ser igual a  $c^n$ , porém é preciso provar que tal valor máximo de fato existe. (Para ajudar o leitor a convencer-se de que essa dúvida é plausível, convidamo-lo a indagar qual o valor mínimo do produto  $x_1, x_2 \dots x_n$  quando esses números são *positivos* e têm soma igual a  $n \cdot c$ . Tal mínimo simplesmente não existe.) No caso em questão, pode-se provar que existe o máximo mas para isto precisa-se usar métodos que envolvem a noção de limite de uma seqüência.

Podemos adaptar um raciocínio, devido a Cauchy, para provar que, se  $x_1, \dots, x_n$  são números positivos com  $x_1 + \dots + x_n = nc$  (constante) então  $x_1 \cdot x_2 \dots x_n \leq c^n$ . O argumento ficará mais claro se considerarmos um caso particular, por exemplo,  $n = 5$ . Sejam então  $x_1, x_2, x_3, x_4$  e  $x_5$  os números dados, cuja soma é  $5c$ . Queremos provar que  $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq c^5$ . O primeiro passo consiste em acrescentar  $c, c, c$  de modo a ficar com oito números. (No caso geral, acrescentamos vários números iguais a  $c$ , até que tenhamos uma potência de 2.) O processo é esquematizado assim:

1)	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$c$	$c$	$c$
2)	$y_1$	$y_1$	$y_2$	$y_2$	$y_3$	$y_3$	$c$	$c$
3)	$y_1$	$y_2$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$c$	$y_3$	$c$
4)	$z_1$	$z_1$	$z_1$	$z_1$	$z_2$	$z_2$	$z_2$	$z_2$
5)	$z_1$	$z_2$	$z_1$	$z_2$	$z_1$	$z_2$	$z_1$	$z_2$
6)	$w$	$w$	$w$	$w$	$w$	$w$	$w$	$w$

Na linha 2,  $y_1$  é a média aritmética de  $x_1$  e  $x_2$ ,  $y_2$  é a média aritmética de  $x_3$  e  $x_4$  enquanto  $y_3$  é a média aritmética de  $x_5$  e  $c$ . Na linha 3, apenas mudamos a ordem dos números. Na linha 4,  $z_1$  e  $z_2$  são, respectivamente, as médias aritméticas entre  $y_1$  e  $y_2$  e entre  $y_3$  e  $c$ . Novamente, na linha 5 a ordem foi alterada e, na linha 6,  $w$  é a média aritmética entre  $z_1$  e  $z_2$ . Em todas essas linhas, os números têm a mesma soma e o produto aumenta ou fica igual. Logo temos  $w = c$  e conseqüentemente o produto dos números da primeira linha é menor do que ou igual a  $c^8$ . Ora, de  $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \cdot c \cdot c \cdot c \leq c^8$ . Concluimos que  $x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \leq c^5$ .

### 3. Outras médias

A *média harmônica* dos números positivos  $x_1, \dots, x_n$  é definida como o inverso da média aritmética dos inversos desses números. Indicando-a

como  $H$ , temos:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Então  $1/H$  é a média aritmética de  $1/x_1, \dots, 1/x_n$ . Como a média geométrica destes inversos é  $1/G$ , onde  $G$  é a média geométrica de  $x_1, \dots, x_n$ , concluímos, em vista do que foi provado acima, que  $1/H \geq 1/G$ . Logo  $G \geq H$ . Assim, entre a média harmônica  $H$ , a média geométrica  $G$  e a média aritmética  $A$  vale a relação  $H \leq G \leq A$ . Novamente, se duas quaisquer dessas médias são iguais, então  $x_1 = \dots = x_n$ .

Para encerrar, mencionemos uma média famosa, chamada *média aritmético-geométrica*, devida ao grande matemático alemão Carl Friedrich Gauss, que a concebeu quando ainda era um rapazinho e, anos depois, veio a identificá-la com o valor de um certo tipo de integral elíptica. Recentemente, a média aritmético-geométrica vem sendo utilizada em métodos numéricos de rápida convergência.

A média aritmético-geométrica de dois números positivos  $x, y$  é definida do seguinte modo. Chamado  $x_1$  e  $y_1$  respectivamente as médias geométrica e aritmética desses números, temos  $x \leq x_1 \leq y_1 \leq y$ . Em seguida, se indicarmos com  $x_2$  e  $y_2$ , respectivamente, as médias geométrica e aritmética de  $x_1$  e  $y_1$ , teremos  $x \leq x_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq y_1 \leq y$ . Prosseguindo desta maneira, obteremos as seqüências:

$$x \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq y_2 \leq y_1 \leq y,$$

onde  $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$  e  $y_{n+1} = (x_n + y_n)/2$ . Se chamarmos de  $x_0$  o limite dos números  $x_n$  e de  $y_0$  o limite de  $y_n$ , segue-se desta última igualdade que  $y_0 = (x_0 + y_0)/2$  e daí resulta que  $x_0 = y_0$ . Portanto os números  $x_n$  e os números  $y_n$  tendem para o mesmo limite, o qual é chamado a *média aritmético-geométrica* de  $x$  e  $y$  e é representado pelo símbolo  $M(x, y)$ . É realmente um fato surpreendente (além de muito elegante) que o número  $M(x, y)$  esteja intimamente relacionado com o cálculo do comprimento de uma elipse. Assim é o gênio de um matemático extraordinário: revela-se muito cedo e tem lampejos quase sobrenaturais.

**N**um comentário anterior, eu disse que o conhecimento humano, mesmo o científico, nem sempre cresce com o tempo. Esta afirmação – reconheço – é debatível, sujeita a qualificações. No âmbito do ensino secundário, entretanto, abundam exemplos que a corroboram. O tópico do artigo seguinte é um deles.

A “Aritmética Progressiva” de Antônio Trajano foi meu livro-texto no terceiro e quarto anos primários. O exemplar que possuo é uma cópia xerox da 84ª edição, publicada em 1959. Na Biblioteca Nacional há um exemplar da segunda edição, datada de 1884. Trata-se portanto de um livro secular e bem difundido.

Na página 142, Trajano dá a seguinte definição:

**GRANDEZAS PROPORCIONAIS.** “Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número.”

“No primeiro caso a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.”

E mais adiante, na página 146:

“Nos casos examinados, a grandeza procurada depende apenas de uma outra espécie de grandeza. É muito freqüente, porém, a grandeza procurada depender de várias outras, podendo, neste caso, ser diretamente proporcional a uma e inversamente proporcional a outras.”

Tudo claro, simples e elementar.

Infelizmente, mais de cem anos depois da primeira edição de Trajano, vários autores contemporâneos de livros usados em nossas escolas ainda fazem confusão acerca de grandezas direta ou inversamente proporcionais, especialmente quando uma grandeza depende de várias outras.

Parece que as oitenta e tantas edições de Trajano não bastaram.

O artigo que se segue, baseado num item da seção “Conceitos e Controvérsias” que escrevi para a Revista do Professor de Matemática, é uma tentativa de esclarecer a importante noção de proporcionalidade.

## Grandezas Proporcionais

Quando Trajano diz “multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número” ele certamente quer dizer um número real (positivo) qualquer: inteiro, fracionário ou irracional. Mas, na prática, é muito difícil verificar, mesmo em casos simples, que “a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número”, salvo quando esse número é inteiro. Para evitar essa dificuldade, modificamos a definição, exigindo a condição apenas no caso de multiplicador inteiro. Isto nos obriga a acrescentar a condição de monotonicidade, a qual é natural e sempre é observada, mesmo pelo próprio Trajano.

Suponhamos que duas grandezas  $x, y$  achem-se de tal modo relacionadas que a cada valor especificado de  $x$  corresponda um valor bem determinado de  $y$ . Neste caso, diz-se que  $y$  é função de  $x$  e escreve-se  $y = f(x)$ .

A dois valores  $x', x''$  correspondem então os valores  $y' = f(x')$  e  $y'' = f(x'')$ . Se a desigualdade  $x' < x''$  implicar sempre que  $y' < y''$ , diremos que  $y$  é uma função crescente de  $x$ . Se, entretanto,  $x' < x''$  acarretar  $y' > y''$ , diremos que  $y$  é uma função decrescente de  $x$ . Em qualquer destes dois casos, diz-se que  $y$  é uma função monótona de  $x$ .

Por exemplo, a área de um círculo é uma função crescente do raio. Já o número de pães que se podem comprar com uma certa quantia é uma função decrescente do preço de um pão. O preço de um kilo de tomate na feira é função do tempo: a cada dia (às vezes, a cada hora) o preço muda. Mas não é uma função monótona pois o valor do tomate diminui na safra, aumenta na entressafra e costuma cair no fim da feira para subir na abertura, no dia seguinte.

Suponhamos que a grandeza  $y$  seja função da grandeza  $x$ , isto é,  $y = f(x)$ . Diremos que  $y$  é diretamente proporcional a  $x$  quando as seguintes condições forem satisfeitas:

- 1<sup>a</sup>)  $y$  é uma função crescente de  $x$ ;
- 2<sup>a</sup>) se multiplicarmos  $x$  por um número natural  $n$ , o valor correspondente de  $y$  também fica multiplicado por  $n$ . Em termos matemáticos:  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$  para todo valor de  $x$  e todo  $n \in \mathbf{N}$ .

Analogamente, diz-se que  $y$  é inversamente proporcional a  $x$  quando  $y = f(x)$  é uma função decrescente de  $x$  e, além disso, ao se multiplicar  $x$  por um número natural  $n$ , o valor correspondente de  $y$  fica dividido por  $n$ , isto é,  $f(n \cdot x) = \frac{1}{n} \cdot f(x)$  para todo valor de  $x$  e todo  $n \in \mathbf{N}$ .

**Advertência:** Para simplificar nossa discussão, em tudo o que se segue nos limitaremos a considerar grandezas cuja medida é um número positivo. Excluiremos de nossas considerações grandezas como temperaturas abaixo de zero, que são medidas com números negativos. Isto torna as nossas demonstrações mais curtas, evitando a consideração de casos, e os

resultados ficam mais simples.

Da definição acima resulta que o peso de um fio homogêneo é diretamente proporcional ao comprimento desse fio. Com efeito, o peso é função crescente do comprimento. Além disso, a homogeneidade do fio significa que dois pedaços do mesmo comprimento (tirados de qualquer parte do fio) têm o mesmo peso. Logo, o peso total de  $n$  pedaços com o mesmo comprimento é igual a  $n$  vezes o peso de cada um desses pedaços. Ou seja, multiplicando-se o comprimento do fio por  $n$ , seu peso também fica multiplicado por  $n$ .

Por outro lado, o tempo necessário para ir, numa linha reta, de um ponto  $A$  a um ponto  $B$ , com velocidade constante, é inversamente proporcional a essa velocidade. De fato, esse tempo diminui quando se aumenta a velocidade. Além disso, ele reduz-se à metade, a um terço, a um quarto, etc quando se duplica, triplica, quadruplica, etc a velocidade. Voltaremos a este tema logo mais adiante.

É importante lembrar que  $y$  pode ser uma função crescente (ou decrescente) de  $x$  sem que seja diretamente (ou inversamente) proporcional a  $x$ .

Por exemplo, a área de um quadrado é uma função crescente do lado mas, se dobrarmos o lado, a área fica multiplicada por quatro (em vez de dois) pois, evidentemente, um quadrado de lado  $2a$  decompõe-se em quatro quadrados justapostos de lado  $a$ .

Outro exemplo: suponhamos que, a cada dia, metade da área contida num certo reservatório evapora-se. Então o volume  $y$  de água existente naquele reservatório é uma função decrescente do número  $x$  de dias decorridos. Se o volume da água inicialmente contida no reservatório era  $V$  então o volume  $y$ , depois de decorridos  $x$  dias, será  $y = V/2^x = f(x)$ .

Como, evidentemente,  $2^{n \cdot x} \neq n \cdot 2^x$ , segue-se que  $\frac{V}{2^{n \cdot x}} \neq \frac{1}{n} \cdot \frac{V}{2^x}$ , ou seja

$f(n \cdot x) \neq \frac{1}{n} \cdot f(x)$  quando  $n \neq 1$ . Conseqüentemente, o volume  $y$ , embora seja uma função decrescente do número  $x$  de dias, não é inversamente proporcional a  $x$ .

Estes dois exemplos mostram que, nas definições dadas para grandezas direta ou inversamente proporcionais por meio de duas condições, a primeira condição apenas não é suficiente, isto é, a segunda não é conseqüência dela. Caberia indagar se a segunda condição, aparentemente

mais forte, não acarretaria a primeira.

A realidade é a seguinte: se existissem apenas números racionais, ou seja, se duas grandezas da mesma espécie fossem sempre comensuráveis, então da igualdade  $f(nx) = n \cdot f(x)$ , válida para todo  $x$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ , poderíamos concluir que  $y = f(x)$  é uma função crescente e, analogamente, de  $f(nx) = f(x)/n$  se concluiria que  $y = f(x)$  é uma função decrescente. Isto é o que mostraremos agora. Em primeiro lugar, vejamos

**Lema.** Se  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$  para todo  $x > 0$  e todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $f(r \cdot x) = r \cdot f(x)$  para todo número racional  $r = p/q$ , onde  $p, q \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Temos:

$$q \cdot f(r \cdot x) = f(q \cdot r \cdot x) = f\left(q \cdot \frac{p}{q} \cdot x\right) = f(p \cdot x) = p \cdot f(x).$$

Logo  $f(r \cdot x) = \frac{p}{q} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$ , como queríamos demonstrar.

Usando o mesmo tipo de raciocínio, o leitor pode demonstrar que, analogamente, se  $f(nx) = f(x)/n$  para todo  $x > 0$  e todo  $n \in \mathbb{N}$  então  $f(r \cdot x) = f(x)/r$  para todo número racional  $r > 0$ .

Em seguida, tentemos provar que a condição  $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$  implica que a função  $y = f(x)$  é crescente. Para isto, consideremos  $x < x'$ . Então  $x' = c \cdot x$  onde  $c > 1$ . Se o número  $c$  fosse racional (ou seja, se as grandezas  $x$  e  $x'$  fossem comensuráveis), teríamos  $f(x') = f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$  e daí  $f(x) < f(x')$  porque  $c > 1$ . Entretanto, pode ocorrer que  $c$  seja irracional (por exemplo,  $x$  pode ser o lado e  $x'$  a diagonal de um quadrado) e então não poderemos utilizar o lema acima.

O teorema abaixo, que é o resultado do fundamental a respeito de grandezas proporcionais, esclarece a questão.

**Teorema 1.** As seguintes afirmações a respeito de  $y = f(x)$  são equivalentes:

- 1)  $y$  é diretamente proporcional a  $x$ ;
- 2) para todo número real  $c > 0$ , tem-se  $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ ;
- 3) existe um número  $k$ , chamado a "constante de proporcionalidade" entre  $x$  e  $y$ , tal que  $f(x) = k \cdot x$  para todo  $x$ .

**Demonstração:** Provaremos que 1)  $\Rightarrow$  2)  $\Rightarrow$  3)  $\Rightarrow$  1). Para mostrar que 1)  $\Rightarrow$  2), suponhamos, por absurdo, que  $y = f(x)$  seja direta-

mente proporcional a  $x$  mas que se consiga achar um número real  $c$  tal que  $f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x)$ . Para fixar idéias, seja  $f(c \cdot x) < c \cdot f(x)$  isto é,  $f(cx)/f(x) < c$ . Entre dois números reais quaisquer existe sempre um número racional. Podemos então achar  $r$  racional tal que  $f(cx)/f(x) < r < c$ , o que significa  $f(cx) < r \cdot f(x) < c \cdot f(x)$ . O lema que provamos acima nos permite reescrever estas desigualdades como  $f(cx) < f(rx) < c \cdot f(x)$ . Mas a desigualdade  $f(cx) < f(rx)$ , juntamente com o fato de ser  $r < c$ , está em contradição com a hipótese de  $y$  ser diretamente proporcional a  $x$ , e ser, portanto, uma função crescente de  $x$ . Analogamente se prova que não pode ser  $f(cx) > c \cdot f(x)$ . Logo temos  $f(cx) = c f(x)$ , o que mostra que 1)  $\Rightarrow$  2).

Para provar que 2)  $\Rightarrow$  3), tomemos  $k = f(1)$ . Então, em virtude da hipótese 2), usada com  $x$  em lugar de  $c$ , temos  $f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = x \cdot k$ , logo  $f(x) = k \cdot x$ .

Finalmente, completamos o ciclo da demonstração provando que 3)  $\Rightarrow$  1). Primeiro relembramos o acordo feito anteriormente: só lidamos com grandezas cujas medidas são números positivos. Logo  $k = f(1) > 0$ . Então  $x < x'$  implica  $k \cdot x < k \cdot x'$ , ou seja,  $f(x) < f(x')$ , portanto  $y = f(x)$  é uma função crescente de  $x$ . Além disso,  $f(n \cdot x) = k \cdot nx = n \cdot kx = n \cdot f(x)$ . Conclusão:  $y$  é diretamente proporcional a  $x$ .

**Observação:** Pelo que vimos acima, sabendo que  $f(nx) = n f(x)$  para todo número natural  $n$ , podemos provar que  $f(rx) = r \cdot f(x)$  para todo número racional  $r$ , mas só conseguimos provar que  $f(cx) = c \cdot f(x)$  para  $c$  irracional quando sabemos também que  $y = f(x)$  é uma função crescente de  $x$ . Isto tem uma razão de ser. Usando técnicas matemáticas avançadas, podem-se achar exemplos de funções que satisfazem  $f(rx) = r \cdot f(x)$  para  $r$  racional mas não são monótonas e (o que dá no mesmo) não cumprem  $f(cx) = c \cdot f(x)$  para todo  $c$  irracional. Funções assim são obtidas de modo abstrato e não resultam de nenhuma comparação entre grandezas habituais. Entretanto, o fato de existirem tais funções mostra que, na definição de grandezas direta ou inversamente proporcionais, são necessárias as duas condições que estipulamos, não sendo permitido omitir nenhuma delas.

Raciocínio análogo ao anterior demonstra o

**Teorema 2.** *As seguintes afirmações a respeito de  $y = f(x)$  são equivalentes:*

- 1)  $y$  é inversamente proporcional a  $x$ ;
- 2) para todo número real  $c$ , tem-se  $f(cx) = f(x)/c$ ;
- 3) existe um número  $k$ , chamado a "constante de proporcionalidade" entre  $x$  e  $y$ , tal que  $f(x) = k/x$  para todo  $x$ .

A demonstração é deixada a cargo do leitor, o qual pode abreviar substancialmente sua tarefa observando que  $y$  é inversamente proporcional a  $x$  se, e somente se, é diretamente proporcional a  $1/x$ .

Os teoremas acima significam que, do ponto de vista estritamente matemático, tanto faz escolhermos a definição que demos, a de Trajano, (que corresponde à condição 2) dos teoremas) ou aquela dada pela condição 3): " $y$  é diretamente (ou inversamente) proporcional a  $x$  quando existe uma constante  $k$  tal que  $y = kx$  (ou  $y = k/x$ )".

Do ponto de vista da aplicabilidade, entretanto, essas três maneiras de definir proporcionalidade não são equivalentes. Nos problemas, a tarefa de verificar se  $y$  é realmente proporcional a  $x$  (direta ou inversamente) é muito mais facilmente executada com a definição que demos. Já comentamos, na Introdução, a condição 2) desses teoremas. Quanto à condição 3), devemos observar que a fórmula  $y = k \cdot x$  raramente é dada no enunciado do problema. É preciso deduzi-la e, para isso, necessitam-se saber propriedades das grandezas em questão, propriedades que encerram a verdadeira noção de proporcionalidade, expressa pelas condições que adotamos. Além disso, se já estamos de posse da fórmula  $y = k \cdot x$ , pouco importa saber sobre proporcionalidade; a fórmula já contém todas as informações que venham a ser solicitadas.

As fórmulas  $y = kx$  e  $y = k/x$ , que caracterizam a proporcionalidade (direta ou inversa) entre  $x$  e  $y$ , nos conduzem a outra maneira de definir o mesmo conceito, que é a seguinte: sejam  $x', x'', x'''$  etc, valores assumidos por  $x$  e  $y', y'', y'''$  etc, os valores correspondentes de  $y$ . Então, a fim de que  $y$  seja diretamente proporcional a  $x$  é necessário e suficiente que  $\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} = \dots$  sendo o valor comum desses quocientes igual à constante de proporcionalidade  $k$ . Com efeito, afirmar que  $y' = k \cdot x', y'' = k \cdot x'', y''' = k \cdot x'''$  etc equivale a dizer que  $y'/x' = y''/x'' = y'''/x''' = \dots = k$ .

Analogamente, a fim de que  $y$  seja inversamente proporcional a  $x$  é necessário e suficiente que  $x' \cdot y' = x'' \cdot y'' = x''' \cdot y''' = \dots = k$ .

Observe-se que se  $k$  é a constante de proporcionalidade (direta) entre

$x$  e  $y$  então a constante de proporcionalidade entre  $y$  e  $x$  é  $1/k$ . Mas se  $x$  e  $y$  são inversamente proporcionais então a constante de proporcionalidade entre  $x$  e  $y$  é a mesma que entre  $y$  e  $x$ .

Os teoremas acima encontram aplicação nas questões de proporcionalidade em Geometria. Um resultado básico a este respeito é o “Teorema de Tales”, como é conhecida a proposição seguinte.

**Teorema 3.** *Toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.*

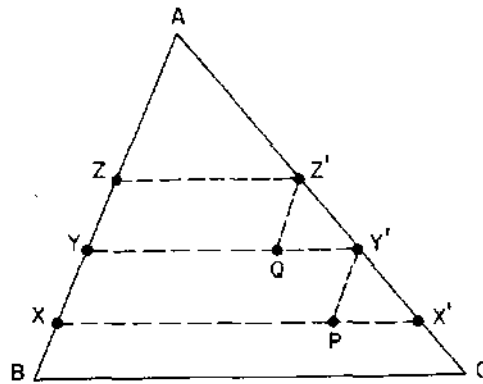


Figura 1.

**Demonstração:** Seja  $ABC$  o triângulo. A cada ponto  $X$  do lado  $AB$  façamos corresponder o ponto  $X'$  do lado  $AC$ , de tal modo que  $XX'$  seja paralela a  $BC$ . Provaremos que o comprimento  $X'C$  é diretamente proporcional ao comprimento  $XB$ . Em primeiro lugar, é claro que se  $X, Y$  são pontos de  $AB$  tais que  $XB < YB$  então  $X'B < Y'B$  porque  $XX'$  e  $YY'$  são paralelos. Em seguida, afirmamos que se os pontos  $X, Y, Z$  do lado  $AB$  são tais que  $XY = YZ$  então  $X'Y' = Y'Z'$ . Para ver isto, tomemos os pontos  $P$  em  $XX'$  e  $Q$  em  $YY'$  de modo que  $Y'P$  e  $Z'Q$  sejam paralelas a  $AB$ . Os triângulos  $PX'Y'$  e  $QY'Z'$  são congruentes porque têm um lado igual ( $PY' = QZ'$ ) compreendido entre ângulos iguais. Desta observação resulta que se  $X, Y$  são pontos de  $AB$  com  $YB = n \cdot XB$  então seus correspondentes  $X', Y'$  no lado  $AC$  são tais que  $Y'C = n \cdot X'C$ . Isto conclui a verificação de que o comprimento  $X'C$  é diretamente proporcional a  $XB$ . Pelo Teorema 1, existe uma constante  $k$  tal que, para todo ponto  $X$  do segmento  $AB$ , tem-se  $X'C = k \cdot XB$  (1). Em particular, para  $X = A$ , como  $A' = A$ ,

obtemos  $AC = k \cdot AB$  (2). Subtraindo (1) de (2) vem:  $AX' = k \cdot AX$  (3). Dividindo a igualdade (3) pela igualdade (1) resulta:

$$\frac{AX'}{X'C} = \frac{AX}{XB}$$

Isto é precisamente o que estipula o Teorema de Tales.

**Observação:** O Teorema de Tales equivale a afirmar que  $X'C$  é diretamente proporcional a  $XB$ . O leitor interessado poderá verificar que a constante de proporcionalidade  $k = AC/AB$  é igual a  $\text{sen } B / \text{sen } C$ .

Uma das aplicações mais antigas da noção de proporcionalidade é o tipo de problema chamado *regra de três*. Nele, tem-se uma grandeza  $y$  (direta ou inversamente) proporcional a  $x$ . Aos valores  $x', x''$  correspondem respectivamente a  $y'$  e  $y''$ . O problema consiste em, conhecendo-se 3 desses valores, determinar o quarto. Conforme  $y$  seja direta ou inversamente proporcional a  $x$  tem-se uma *regra de três direta* ou uma *regra de três inversa*.

Uma vez comprovado (mediante as definições dadas acima) que  $y$  é, de fato, proporcional a  $x$ , não há dificuldade em resolver a regra de três. Digamos que se conhecem  $x', x''$  e  $y'$ . Se a regra de três é direta, temos  $y' = k \cdot x'$  e  $y'' = k \cdot x''$ , logo  $k = y'/x'$  e, por substituição obtemos  $y'' = y' \cdot x''/x'$ . Se a regra de três é inversa, temos  $x'y' = x''y'' = k$ , logo  $y'' = x' \cdot y'/x''$ . Estes resultados mostram que se pode calcular o valor  $y''$  quando se conhecem  $x, y'$  e  $x''$ , sem precisar ter o valor de  $k$ .

É importante observar que, ao aplicarmos um modelo matemático para analisar uma situação concreta, devemos ter em mente os limites da validade do modelo. Em particular, quando afirmamos que uma grandeza  $y$  é proporcional a outra grandeza  $x$ , devemos deixar claro (explícita ou tacitamente) que isto se dá dentro de certos limites de variação para  $y$  e  $x$ .

Por exemplo, a conhecida “Lei de Hooke” diz que a deformação sofrida por um corpo elástico (digamos, uma mola) é diretamente proporcional à (intensidade da) força empregada. A fórmula matemática que exprime este fato é  $d = k \cdot F$ . ( $d$  = deformação,  $F$  = intensidade da força,  $k$  = coeficiente de elasticidade.) A validade desta equação como modelo matemático para representar o fenômeno é sujeita a restrições evidentes. A força  $F$  não pode ser muito pequena porque então, mesmo positiva, não seria suficiente para deslocar a mola; neste caso teríamos

$d = 0$  com  $F > 0$  logo não valeria o modelo  $d = k \cdot F$ . Também não se pode tomar  $F$  muito grande porque a mola arrebentaria e, pouco antes disso, seu alongamento seria menos do que proporcional a  $F$ .

Outros exemplos são os clássicos problemas de operários construindo uma casa ou datilógrafas executando um serviço. Em geral, supõe-se que o tempo necessário para terminar o trabalho é inversamente proporcional ao número de pessoas utilizadas. Se isto fosse verdadeiro sem restrições então, aumentando-se o número de pessoas suficientemente, poder-se-ia construir uma casa ou datilografar um livro num tempo arbitrariamente pequeno: um segundo, por exemplo.

O professor, ao ensinar esse tópico, deve alertar os alunos sobre tais cuidados, deixando claro que as conclusões obtidas pressupõem uma hipótese subjacente: a de que o modelo matemático adotado se aplica à situação considerada.

Nem sempre o modelo de proporcionalidade é o mais adequado. Em certas situações econômicas, por exemplo, vale o “princípio dos retornos decrescentes”, segundo o qual, se aumentarmos muito os investimentos, os lucros adicionais serão relativamente menores. Como ilustração: se, num certo terreno, plantarmos o dobro de sementes poderemos dobrar a colheita mas, se continuarmos dobrando, ano a ano, o número de sementes plantadas, não é razoável esperar que dobrem sempre as colheitas. A partir de um certo ponto, começa-se a notar a lei dos retornos decrescentes. A mesma situação ocorre em fisiologia: quando aumenta o estímulo cresce a sensação mas, depois de um certo ponto, o acréscimo da sensação é cada vez menor em relação ao acréscimo do estímulo.

Uma situação oposta ocorre com o imposto de renda que pagamos. A renda líquida do contribuinte é classificada por intervalos, chamados “faixas”. Em cada faixa, o imposto a pagar é proporcional ao acréscimo da renda líquida em relação à faixa anterior. Mas o coeficiente de proporcionalidade varia de uma faixa a outra, aumentando quando se passa de uma faixa de renda a outra maior.

Uma atividade interessante (e bastante educativa) consiste em esboçar o gráfico da função  $y = f(x)$  nas situações acima consideradas.

No caso de  $y$  ser diretamente proporcional a  $x$ , temos  $y = k \cdot x$ . Quando  $y$  é inversamente proporcional a  $x$ , temos  $y = k/x$ . No primeiro caso, o gráfico é uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas e no segundo é uma hipérbole.

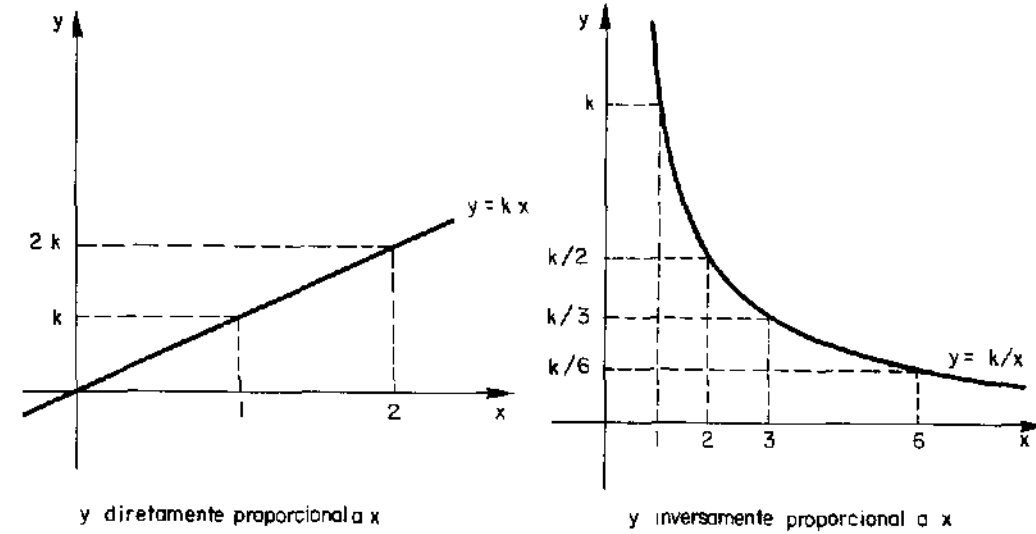


Figura 2.

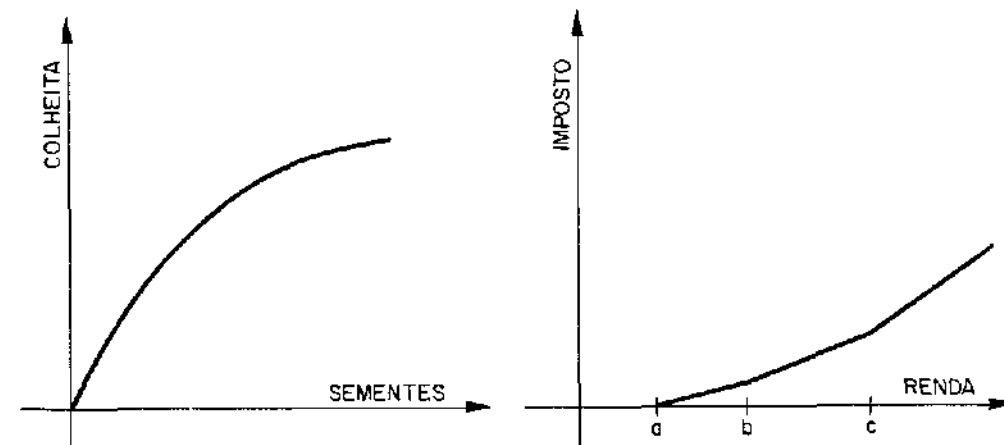


Figura 3.

Numa situação de “retornos decrescentes”, temos  $y = f(x)$ , onde  $f$  é uma função “côncava”: embora crescente, cresce cada vez mais lentamente, a medida que  $x$  aumenta. No caso particular das colheitas, para

valores de  $x$  não muito grandes  $y$  é proporcional a  $x$ , de modo que o gráfico é, no começo, uma reta.

No caso do imposto de renda, o gráfico é uma poligonal que no começo confunde-se com o eixo das abcissas, pois na primeira faixa de renda o imposto a pagar é zero. À medida que se caminha para a direita, cresce a inclinação de cada lado da poligonal. A fim de que o contribuinte não pague de imposto tudo o que ganhou a mais em relação à faixa anterior, o ângulo de cada lado da poligonal com o eixo  $x$  deve ser menor do que  $45^\circ$ . Aqui tem-se uma função “convexa”: para valores grandes de  $x$  o crescimento de  $y$  se acelera.

Em grande número de problemas tem-se uma grandeza  $z$ , de tal modo relacionada com outras, digamos  $x, y, u, v, w$ , que a cada escolha de valores para estas últimas corresponde um valor bem determinado para  $z$ . Então dizemos que  $z$  é uma função das variáveis  $x, y, u, v, w$  e escrevemos  $z = f(x, y, u, v, w)$ .

Nestas condições, diz-se que  $z$  é *diretamente proporcional a  $x$*  quando:

- 1<sup>o</sup>) para quaisquer valores fixados de  $y, u, v, w$ , a grandeza  $z$  é uma função crescente de  $x$ , isto é, a desigualdade  $x' < x''$  implica  $f(x', y, u, v, w) < f(x'', y, u, v, w)$ ;
- 2<sup>o</sup>) para quaisquer  $x, y, u, v, w$  e  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se  $f(n \cdot x, y, u, v, w) = n \cdot f(x, y, u, v, w)$ .

Analogamente, diz-se que  $z = f(x, y, u, v, w)$  é *inversamente proporcional a  $x$*  quando:

- 1<sup>o</sup>) para quaisquer valores fixados de  $y, u, v, w$ , a grandeza  $z$  é uma função decrescente de  $x$ , isto é, desigualdade  $x' < x''$  implica  $f(x', u, v, w) > f(x'', u, v, w)$ ;
- 2<sup>o</sup>) para quaisquer  $x, y, u, v, w$  e  $n \in \mathbb{N}$  tem-se  $f(n \cdot x, y, u, v, w) = f(x, y, u, v, w)/n$ .

Definições semelhantes podem ser dadas para as demais variáveis  $y, u, v, w$ . Como no caso de uma só variável, tem-se  $f$  inversamente proporcional a  $x$  se, e somente se,  $f$  é diretamente proporcional a  $1/x$ .

O teorema seguinte resume os Teoremas 1 e 2 no caso de uma função de várias variáveis. Para fixar as idéias, consideramos as variáveis  $x, y, u, v, w$  mas é evidente que ele vale para um número qualquer de variáveis.

**Teorema 4.** *Seja  $z = f(x, y, u, v, w)$ . As seguintes afirmações são*

*equivalentes:*

- 1)  *$z$  é diretamente proporcional a  $x, y$  e inversamente proporcional a  $u, v, w$ ;*
- 2) *existe uma constante  $k$  tal que  $z = k \cdot \frac{x \cdot y}{u \cdot v \cdot w}$ .*

**Demonstração:** Suponhamos válida a afirmação 1) e escrevamos  $k = f(1, 1, 1, 1, 1)$ . Em virtude dos Teoremas 1 e 2, temos:

$$\begin{aligned} z &= f(x, y, u, v, w) = f(x \cdot 1, y, u, v, w) = x \cdot f(1, y, u, v, w) \\ &= xy \cdot f(1, 1, u, v, w) = \frac{xy}{u} \cdot f(1, 1, 1, v, w) \\ &= \frac{xy}{uv} \cdot f(1, 1, 1, 1, w) = \frac{xy}{uvw} \cdot f(1, 1, 1, 1, 1) = k \frac{xy}{uvw}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se vale a afirmação 2) então 1) é obviamente verdadeira.

Resulta imediatamente do teorema acima (e também da própria definição) que uma grandeza é diretamente (ou inversamente) proporcional a várias outras se, e somente se, é diretamente (ou inversamente) proporcional ao produto dessas outras.

Por exemplo, a área  $A = A(x, y)$  de um retângulo de base  $x$  e altura  $y$  é diretamente proporcional a  $x$  e a  $y$ . Basta verificar quanto a  $x$ ; a outra verificação é análoga. Em primeiro lugar, se  $x' < x''$  então  $A(x', y) < A(x'', y)$  porque o retângulo de base  $x'$  e altura  $y$  está contido no retângulo de base  $x''$  e mesma altura  $y$ . Além disso, o retângulo de base  $n \cdot x$  e altura  $y$  se decompõe como reunião de  $n$  retângulos justapostos, todos com base  $x$  e altura  $y$ , logo  $A(n \cdot x, y) = n \cdot A(x, y)$ . Segue-se do Teorema 4 que existe uma constante  $k$  tal que  $A(x, y) = k \cdot xy$ . Ora,  $k = A(1, 1)$  é a área de um retângulo de base e altura iguais a 1 (quadrado unitário). Mas o quadrado de lado 1 é tomado como unidade de área, logo  $A(1, 1) = 1$ . Portanto  $k = 1$  e  $A(x, y) = x \cdot y$ .

A chamada “lei de gravitação universal” (de Newton) diz que “a matéria atrai a matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado da distância”. Isto significa que um corpo de massa  $m'$  e outro de massa  $m''$ , situados a uma distância  $d$  um do outro, se atraem mutuamente com uma força cuja intensidade  $F$  é diretamente proporcional a  $m'$  e  $m''$ , e inversamente proporcional a  $d^2$ . Segue-se do Teorema 4 que  $F = km'm''/d^2$ , onde a constante  $k$  depende do sistema de unidades utilizado.

Vejam os outros exemplos: um movimento retilíneo (aquele em que a trajetória é uma linha reta) chama-se *uniforme* quando o móvel percorre espaços iguais em tempos iguais. A *velocidade* é, por definição, o espaço percorrido na unidade de tempo. Num movimento desta espécie, o espaço percorrido a partir de um certo ponto fixado, e de um instante em que se começou a contar o tempo, é função da velocidade e do tempo decorrido:  $E = f(v, t)$ . Evidentemente,  $E$  é função crescente de  $v$  e de  $t$ . Além disso, pela definição de movimento uniforme, o espaço percorrido depois de  $n$  intervalos de tempos iguais é  $n$  vezes o espaço percorrido durante um desses intervalos (mantida constante a velocidade). Logo  $f(v, nt) = n \cdot f(v, t)$ . Segue-se do Teorema 1 que  $E = f(v, t) = t \cdot f(v, 1)$ .

A definição de velocidade como o espaço percorrido na unidade de tempo significa que  $f(v, 1) = v$ . Segue-se então que  $E = vt$ . Daí resulta que, no movimento uniforme, o espaço percorrido é diretamente proporcional à velocidade e ao tempo. (Sendo igual a 1 a constante  $k$  de proporcionalidade.)

Uma grandeza pode ser função crescente de cada uma das variáveis de que depende, sendo diretamente proporcional a algumas delas e não sendo sequer diretamente proporcional a alguma potência de cada uma das outras. Um exemplo importante desta situação é dado pela evolução de um capital  $c$ , proveniente da aplicação de um capital inicial  $c_0$ , colocado a uma taxa de  $\alpha$  por cento ao ano, durante  $t$  anos ( $t$  não é necessariamente um número inteiro). Supomos que esses juros são compostos continuamente, isto é, que a cada instante, o juro obtido é juntado ao capital. Tem-se  $c = f(c_0, \alpha, t)$ , uma função crescente de cada uma de suas três variáveis. Evidentemente,  $c$  é diretamente proporcional ao capital inicial  $c_0$ . A igualdade  $f(n \cdot c_0, \alpha, t) = n \cdot f(c_0, \alpha, t)$  resulta da observação óbvia de que, fixados  $\alpha$  e  $t$ ,  $n$  pacotes iguais com a mesma quantia  $c_0$  devem render o mesmo que um único pacote contendo a quantia  $nc_0$ . Já em relação às outras variáveis, o mesmo não acontece. Vejamos, por exemplo o tempo  $t$ . Vale a desigualdade  $f(c_0, \alpha, 2t) > 2 \cdot f(c_0, \alpha, t)$  porque ao empregarmos o capital  $c_0$  durante  $2t$  anos (à mesma taxa de juros  $\alpha$ ), o rendimento nos últimos  $t$  anos é maior, por corresponder a um capital que já cresceu em relação ao capital inicial. Se estudarmos a questão cuidadosamente, veremos que  $f(c_0, \alpha, nt) = c_0 \cdot f(1, \alpha, t)^n$ . Isto caracteriza o que se chama *crescimento exponencial*. A fórmula que exprime  $c$  como função de  $c_0$ ,  $\alpha$  e  $t$  é  $c = c_0 \cdot e^{\alpha t}$ . (Veja a página 93

do meu livrinho "Logaritmos", nesta coleção.) Daí resulta que  $c$  não é diretamente proporcional a potência alguma de  $\alpha$  ou de  $t$ .

Grandezas que são direta ou inversamente proporcionais a duas ou mais outras dão origem ao tipo de problema conhecido como "regra de três composta". Nesses problemas tem-se, digamos, uma grandeza  $z$  diretamente proporcional a  $x$  e  $y$ , e inversamente proporcional a  $u$ . Conhece-se o valor  $z'$ , correspondente aos valores particulares  $x', y', u'$  e procura-se determinar o valor  $z''$ , que corresponde a outros valores particulares  $x'', y'', u''$ . Pelo Teorema 4, sabemos que  $z' = kx'y'/u'$  e  $z'' = k \cdot x''y''/u''$ . Dividindo a 2ª igualdade pela 1ª a constante  $k$  desaparece e temos  $z''/z' = x''y''u'/x'y'u''$ , donde  $z'' = z'x''u'/x'y'u''$ .

A noção de proporcionalidade é uma das mais antigas em Matemática. É também uma das mais úteis, com aplicações freqüentes na Geometria, na Física, na Astronomia, e mesmo na vida quotidiana, daí resultando seu interesse para o ensino. A importância dessa noção está associada também ao fato de que ela se deixa representar por um modelo matemático de extrema simplicidade, expresso pelas equações  $y = k \cdot x$  e  $y = k/x$  no caso de uma só variável, ou por equações do tipo  $y = kxy/uvw$  no caso de muitas variáveis.

Deve ficar claro, entretanto, que ao se estudar uma questão que possa envolver proporcionalidade, seja ela de natureza científica ou prática, a equação (caso tenha cabimento) é a etapa final da resolução do problema.

Quando um cientista, um engenheiro, um geômetra ou um comerciante se depara com um problema, a fórmula  $y = k \cdot x$  (ou qualquer de suas análogas) não vem junto com os dados. Compete primeiramente ao interessado verificar se o modelo  $y = k \cdot x$  (ou um análogo) se adapta ao seu caso. Antes de usá-lo, é preciso comprovar que  $y$  é realmente proporcional a  $x$ .

Além disso, cumpre observar que em certos casos (como no Teorema de Tales, por exemplo) a fórmula  $y = k \cdot x$  é irrelevante, ou simplesmente não cabe no contexto da discussão. No caso exemplificado, a constante  $k$  pode exprimir-se como o quociente de dois senos mas isto é apenas uma curiosidade. O seno de um ângulo só vai ser definido mais tarde e, mesmo assim, só tem sentido por causa do Teorema de Tales. Outro exemplo é a área  $A$  de um retângulo de base  $b$  e altura  $a$ . A razão pela qual  $A$  é diretamente proporcional aos lados  $a, b$  não é a fórmula  $A = ab$ , mas antes o contrário. Primeiro prova-se que  $A$  é diretamente proporcional a

$a$  e  $b$  e daí deduz-se a fórmula.

A definição de proporcionalidade é útil exatamente porque permite, mediante duas perguntas simples ( $y$  cresce quando  $x$  cresce? ao dobrarmos, triplicarmos, etc o valor de  $x$  ocorre o mesmo com  $y$ ?), saber se o modelo  $y = kx$  se aplica ou não à situação considerada.

Mas o leitor atento deverá ter percebido, a partir do que foi dito aqui, que existe uma propriedade básica, presente nas verificações da proporcionalidade, a qual pode ser formulada assim: “a iguais variações de  $x$  correspondem variações iguais de  $y$ ”.

É por isso que o peso de um fio homogêneo é proporcional ao seu comprimento: a homogeneidade significa que pedaços do mesmo tamanho têm sempre o mesmo peso, em qualquer trecho do fio.

Assim também é que, no movimento retilíneo uniforme, o espaço percorrido é proporcional ao tempo gasto em percorrê-lo: a uniformidade significa precisamente que em intervalos de tempo iguais são percorridos espaços iguais. (Compare-se com a queda de um corpo, sujeito apenas à ação da gravidade. Aí o espaço percorrido, digamos num segundo, é menor ou maior conforme esse segundo seja tomado no início ou perto do fim da queda.)

Também no Teorema de Tales, visto acima, para verificar que  $X'C$  é proporcional a  $XB$ , tivemos que provar antes que, a variações iguais de  $X$  correspondem variações iguais de  $X'$ . Análoga observação vale quando se comprova que a área de um retângulo com altura fixada é proporcional à base.

E, num exemplo mais prosaico, quando se diz que o número de peças fabricadas pelos operários de uma empresa é diretamente proporcional ao número de operários, esta afirmação decorre de uma hipótese tácita, a saber, que ao se empregar mais um operário o aumento da produção é o mesmo, independentemente de quantos operários já existiam. Novamente é instrutivo contratar com um caso em que essa “uniformidade” não ocorre. Por exemplo, o número de diagonais de um polígono convexo não é proporcional ao número de lados porque, ao acrescentarmos mais um lado, o acréscimo sofrido pelo número de diagonais depende do número de lados previamente existentes: ao passarmos de  $n$  para  $n + 1$  lados, o número de diagonais aumenta de  $n - 1$ .

O princípio geral é o seguinte: se a acréscimos (positivos) iguais de  $x$  correspondem acréscimos iguais (e positivos) de  $y$  então, fixando-se

arbitrariamente um valor  $x_0$  e seu correspondente  $y_0$ , tem-se  $y - y_0$  diretamente proporcional a  $x - x_0$ . Em particular, se a  $x_0 = 0$  corresponder  $y_0 = 0$  então  $y$  será diretamente proporcional a  $x$ . Vale, evidentemente, a recíproca: se  $y$  é diretamente proporcional a  $x$  então a acréscimos iguais de  $x$  correspondem acréscimos iguais de  $y$ .

## Comentário Sobre um Livro

“O Ensino da Matemática na Escola Secundária por Meio de Aplicações” (Teaching Secondary Mathematics Through Applications), por Herbert Fremont. (2ª edição, 1979, Editora Prindle, Weber e Schmidt, USA.)

O objetivo principal do livro de Fremont é ajudar aos professores de Matemática nas escolas de 1ª e 2ª graus a cumprirem as seguintes missões:

- (1) Mostrar aos estudantes que não há razão para temer a Matemática;
- (2) Exibir aos estudantes diversos modos pelos quais a Matemática está integrada em sua vida diária.

Estas são, sem dúvida, as coisas mais importantes que um professor de Matemática pode conseguir como resultado do seu trabalho. Evidentemente, a tarefa (1) é um auxiliar para (2), necessária para que as várias situações exibidas possam ser assimiladas sem maiores traumas.

O que é, afinal, a Escola, senão uma preparação para a Vida? Admitido este princípio óbvio, a Matemática tem lugar de destaque na Escola simplesmente porque é indispensável para entender as coisas que nos cercam na vida moderna, para explicar os fenômenos físicos, biológicos e sociais, para controlar as forças dessas (e de outras) espécies, enfim, para que o jovem possa ter uma visão inteligente do mundo em que vive.

A maioria dos estudantes e praticamente todos os professores de Matemática já ouviram ou leram afirmações como as que acabamos de fazer. Muito poucos, porém, tiveram a oportunidade de ver tais afirmações genéricas serem exemplificadas por meio de casos concretos, preferivelmente relacionados a situações atuais. Quantos de nossos colegas não adorariam possuir um repositório, uma coleção de problemas nos quais questões objetivas e modernas fossem tratadas com técnicas matemáticas bastante simples, ao alcance dos conhecimentos de seus alunos? Quantos não anseiam por uma lista variada de exemplos utilizáveis em classe, provando assim aos estudantes que é útil aprender Matemática?

O livro de Fremont é, antes de mais nada, uma feliz antologia de aplicações da Matemática ao mundo de hoje, tudo isso ao nível da Escola

Secundária. Neste particular, ele é o melhor dos antídotos contra o torpor da chamada “Matemática Moderna”. Com efeito, o grande e fundamental fracasso desta última foi precisamente o de adotar uma concepção da Matemática bastante dissociada das aplicações e, como tal, em contradição com o objetivo básico da Escola como preparação à Vida.

O livro de Fremont tem 342 páginas e cerca de 300 delas contêm exemplos de aplicações interessantes da Matemática. É claro que não podemos analisar todos eles aqui. Para dar uma pálida idéia da variedade e do teor desses exemplos, vejamos dois:

(1) Em Geometria, aprendemos que “as áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança”, e que “os volumes de dois sólidos semelhantes estão entre si como o cubo da razão de semelhança”. Daí decorre, por exemplo, que se  $C$  for um cilindro de altura  $a$  e raio da base  $r$  e  $C'$  for um cilindro cuja altura é  $10a$  e cujo raio da base é  $10r$  então a superfície de  $C'$  tem área igual a 100 vezes a superfície de  $C$ , enquanto o volume de  $C'$  é 1000 vezes o volume de  $C$ ! Fremont discute a aplicação desse princípio à seguinte questão motivada pelo livro “As Viagens de Gulliver”:

“Se existisse um gigante que tivesse a mesma forma de um homem, salvo o fato de ser 10 vezes maior, poderia tal gigante correr tão depressa como nós?”

Depois de uma clara e paciente análise de como variam a área, o volume e o peso de figuras semelhantes, o autor conclui o seguinte:

“Nosso grande e forte gigante é um sujeito infeliz. Seu fêmur é 100 vezes mais forte que o nosso (pois a resistência do mesmo é proporcional à área de sua seção transversal). Mas precisa suportar um peso 1000 vezes maior! Cada vez que ele se levanta, para caminhar ou correr, podemos imaginá-lo quebrando ambas as pernas! A força da gravidade tornou-se um inimigo violento. As implicações desta discussão são numerosas.” (Nesta altura, o autor cita um interessante artigo da conhecida coletânea “The World of Mathematics”, de James Newman. O artigo, por J.B.S. Haldane, chama-se “A propósito de ter o tamanho certo”. Haldane, um famoso biólogo, observa ainda que um animal dez vezes maior que o homem, pesando mil vezes mais, deverá consumir mil vezes mais comida e oxigênio. Como a superfície de cada órgão aumentou cem vezes, cada milímetro quadrado de intestino deverá absorver dez vezes mais comida, o que lhe forçará a ter mais intestinos. Em geral, quanto maior o animal,

mais complicado ele é obrigado a ser.)

(2) Em sua loja, você vende no máximo 60 bicicletas por ano. A companhia que as fornece exige que você venda pelo menos 3 vezes mais bicicletas masculinas do que femininas. Seu lucro numa bicicleta masculina é de 20 mil cruzeiros e numa feminina é de 24 mil cruzeiros. Qual é o seu maior lucro possível e quantas bicicletas de cada tipo você deve vender para obter esse lucro máximo?

Este e alguns outros problemas semelhantes constituem exemplos de um tipo extremamente importante nas atividades econômicas (comércio, indústria, etc) e, mais geralmente nas atividades que requerem tomadas de decisão (governo, conflitos, etc). Essas questões se enquadram no ramo da Matemática chamado Programação Linear. Pelo menos nos casos em que se trata de um número reduzido de variáveis (duas ou três), os problemas como este estão perfeitamente ao alcance dos alunos que saibam traçar o gráfico de uma equação do tipo  $ax + by = c$  (ou  $ax + by + cz = d$ , no caso de 3 variáveis).

No caso do problema proposto, se indicarmos por  $x$  o número de bicicletas masculinas e  $y$  o de bicicletas femininas vendidas num ano, o lucro do vendedor no ano é  $20x + 24y$ . Trata-se de achar o maior valor que esta expressão pode atingir, sabendo-se que  $x + y \leq 60$ ,  $x \geq 3y$ ,  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

O conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas  $(x, y)$  satisfazem simultaneamente estas 4 desigualdades é a superfície de um triângulo  $T$  cuja base é o segmento  $[0, 60]$  do eixo das abscissas e cujo vértice é o ponto  $(x, y)$  com  $x = 45$ ,  $y = 15$ . O problema se reduz, portanto, a achar o ponto  $(x, y)$  desse triângulo para o qual a expressão  $20x + 24y$  assume o valor máximo. Ora, para cada lucro possível  $L = 20x + 24y$ , temos

$$y = -\frac{20}{24}x + \frac{L}{24},$$

ou seja

$$y = -\frac{5}{6}x + \frac{L}{24}.$$

Isto nos diz que as vendas  $(x, y)$  que geram o mesmo lucro  $L$  são representadas por pontos situados na reta com inclinação  $-5/6$  que corta o eixo  $y$  no ponto de ordenada  $L/24$ . A solução do nosso problema reduz-se portanto a achar uma reta de inclinação  $-5/6$  que passe pelo triângulo  $T$

e que corte o eixo  $y$  no ponto de ordenada  $L/24$  maior possível. O ponto (ou pontos)  $(x, y)$  pertencente a  $T$  e situado nessa reta será a solução (ou serão as soluções). No nosso caso, é evidente que a solução do problema é  $x = 45, y = 15$ , com o lucro  $L = 1\ 260\ 000$  cruzeiros.

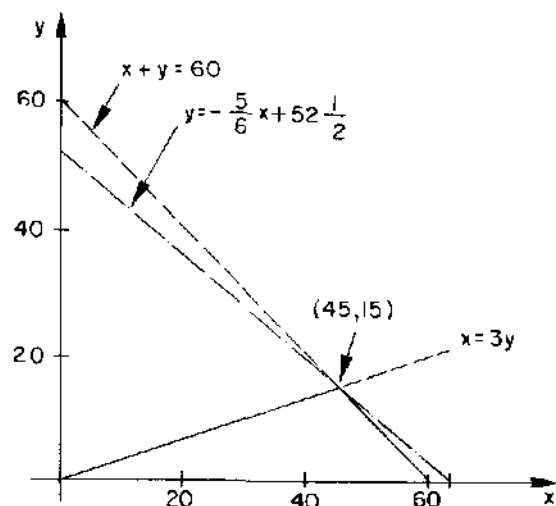


Figura 1.

Dissemos acima que o livro de Fremont é, antes de tudo, uma feliz coletânea de aplicações da Matemática a questões interessantes e atuais. “Antes de tudo”, mas não “apenas”. O livro se divide em três partes, das quais a segunda, que ocupa 294 páginas e que é formada pelas aplicações de que falamos, é significativamente intitulada “O Ensino da Matemática”. Isto já define a filosofia do autor bem claramente.

A primeira parte do livro chama-se “Preparação para Ensinar Matemática”. Tem 22 páginas e contém quase tudo o que precisa ser dito sobre a metodologia do ensino dessa matéria. O autor, com sua longa experiência em salas de aula e, acima de tudo, com grande honestidade, nos diz que a arte de ser um bom professor de Matemática, não se baseia em complicadas teorias nem constitui uma ciência abstrata.

Ele enumera 10 princípios básicos e simples sobre os quais deve assentar-se o ensino eficiente da Matemática.

Os cinco primeiros princípios se referem à natureza da Matemática, que deve ser bem compreendida pelo professor. Eles são os seguintes:

- 1) A Matemática ajuda a compreender nosso meio ambiente.
- 2) A Matemática é a linguagem da Ciência.
- 3) A Matemática e a sociedade são interdependentes.
- 4) A Matemática é um sistema abstrato de idéias.
- 5) A Matemática é o estudo de modelos (“patterns”).

É evidente que não pode ser um bom professor aquele que não tem uma boa compreensão do significado e do alcance do assunto que está ensinando. Em apenas 4 páginas o autor discorre, com grande clareza, sobre cada um dos cinco princípios acima. O grosso do texto constitui uma elaboração desses cinco postulados, fartamente ilustrados nas quase 300 páginas que constituem a 2ª parte do livro.

Os outros cinco axiomas fundamentais do ensino da Matemática se referem à experiência de transmitir o conhecimento matemático na sala de aulas. Eles são os seguintes:

- 1) O “ciclo vital” da aprendizagem de uma idéia matemática mostra que essa aprendizagem deve evoluir a partir de um envolvimento ativo com objetos concretos até a análise e as abstrações.
- 2) Durante todo esse processo, o estudante deve estar livre para pensar e tirar suas próprias conclusões.
- 3) O pensamento lógico-analítico deve ser precedido por oportunidades para idéias “aventurosas”, tentativas e palpites.
- 4) Uma criança, em geral, é capaz de abstrair um princípio matemático depois de confrontada com uma série de situações às quais o dado princípio é inerente.
- 5) Imagens visuais são indispensáveis para que o estudante possa compreender e utilizar conceitos abstratos.

O autor termina seu compêndio de pedagogia de 21 páginas ilustrando com um exemplo concreto (ensino da função linear) como utilizar estes princípios na elaboração de um plano de ensino de um tópico, oferecendo, inclusive, sugestões sobre a atuação do professor na sala de aula. Em forma mais resumida, ele indica um plano para o ensino da congruência em Geometria. No decorrer do capítulo, ele enumera uma série de conselhos utilíssimos ao jovem professor, no que concerne ao seu relacionamento humano com os alunos.

O livro termina com um capítulo sobre a elaboração de testes e o problema da verificação da aprendizagem, em geral.

O livro do Professor Fremont é um trabalho com profunda percepção

do problema do ensino da Matemática, escrito com honestidade e amor aos seus colegas professores de Matemática de todo o mundo. Estou certo de que sua tradução para a língua portuguesa servirá como auxílio inestimável ao esforço que se faz no sentido de divulgar cada vez mais o conhecimento da Matemática e o seu ensino no Brasil.

*“Conceitos e Controvérsias” é uma seção da Revista do Professor de Matemática, na qual os itens a seguir foram publicados. O objetivo da seção é esclarecer assuntos do currículo do primeiro e segundo grau em Matemática, sobre os quais costumam ocorrer dúvidas ou divergências.*

*Alguns dos tópicos abordados correspondem a perguntas que foram diretamente formuladas pelos leitores daquela revista, enquanto outros referem-se a pontos que a minha antiga experiência de professor indica merecerem mais explicações e opiniões. Evidentemente, nem por sombra tenho a pretensão de dar a palavra final ou mesmo a palavra adequada. Entretanto, creio que esse método de interação entre os que fazem a revista e os que a lêem tem seu lado positivo. Quando menos seja, contribui para tornar o ambiente mais agitado.*

## Conceitos e Controvérsias

Minha intenção aqui é a de apresentar opiniões e esclarecimentos sobre pontos controvertidos, dúvidas, dificuldades e questões em geral que preocupem o professor de Matemática. Os assuntos de que tratarei, gostaria que fossem sugeridos pelo leitor, motivados por seu desejo de aprimorar-se provocados por sua curiosidade, suscitados às vezes por sua perplexidade diante de opiniões divergentes. Prefiro e darei sempre prioridade a questões relativas à Matemática propriamente dita, embora possa eventualmente discutir problemas correlatos, como os didáticos, por exemplo.

Enquanto não chegam as indagações dos leitores, vamos começar com algumas perguntas que me foram feitas, em diferentes ocasiões e lugares, por pessoas interessadas em ensinar Matemática.

### 1. Zero é um número natural?

Sim e não. Incluir ou não o número 0 no conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente, de conveniência. O mesmo professor ou autor pode, em diferentes circunstâncias, escrever  $0 \in \mathbb{N}$  ou  $0 \notin \mathbb{N}$ . Como assim?

Consultemos um tratado de Álgebra. Praticamente em todos eles encontramos  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Vejamos um livro de Análise. Lá acharemos quase sempre  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Por que essas preferências? É natural que o autor de um livro de Álgebra, cujo principal interesse é o estudo das operações, considere zero como um número natural pois isto lhe dará um elemento neutro para a adição de números naturais e permitirá que a diferença  $x - y$  seja uma operação com valores em  $\mathbb{N}$  não somente quando  $x > y$  mas também se  $x = y$ . Assim, quando o algebrista considera zero como número natural, está facilitando a sua vida, eliminando algumas exceções.

Por outro lado, em Análise, os números naturais ocorrem muito freqüentemente como índices de termos numa seqüência.

Uma seqüência (digamos, de números reais) é uma função  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo domínio é o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais. O valor que a função

$x$  assume no número natural  $n$  é indicado com a notação  $x_n$  (em vez de  $x(n)$ ) e é chamado o “ $n$ -ésimo termo” da seqüência.

A notação  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  é usada para representar a seqüência. Aqui, o primeiro termo da seqüência é  $x_1$ , o segundo é  $x_2$  e assim por diante. Se fôssemos considerar  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  então a seqüência seria  $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , na qual o primeiro termo é  $x_0$ , o segundo é  $x_1$ , etc. Em geral,  $x_n$  não seria o  $n$ -ésimo e sim o  $(n + 1)$ -ésimo termo. Para evitar essa discrepância, é mais conveniente tomar o conjunto dos números naturais como  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

Para encerrar este tópico, uma observação sobre a nomenclatura matemática. Não adianta encaminhar a discussão no sentido de examinar se o número zero é ou não “natural” (em oposição a “artificial”). Os nomes das coisas em Matemática não são geralmente escolhidos de modo a transmitirem uma idéia sobre o que devem ser essas coisas. Os exemplos abundam: um número “imaginário” não é mais nem menos existente do que um número “real”; “grupo” é uma palavra que não indica nada sobre seu significado matemático e, finalmente, “grupo simples” é um conceito extremamente complicado, a ponto de alguns de seus exemplos mais famosos serem chamados (muito justamente) de “monstros”.

### 2. Por que $(-1)(-1) = 1$ ?

Meu saudoso professor Benedito de Moraes costumava explicar, a mim e a meus colegas do segundo ano ginásial, as “regras de sinal” para a multiplicação de números relativos da seguinte maneira:

- 1<sup>a</sup>) o amigo do meu amigo é meu amigo, ou seja  $(+)(+) = +$ ;
- 2<sup>a</sup>) o amigo do meu inimigo é meu inimigo, isto é,  $(+)(-) = -$ ;
- 3<sup>a</sup>) o inimigo do meu amigo é meu inimigo, quer dizer,  $(-)(+) = -$ ; e, finalmente,
- 4<sup>a</sup>) o inimigo do meu inimigo é meu amigo, o que significa  $(-)(-) = +$ .

Sem dúvida esta ilustração era um bom artifício didático, embora alguns de nós não concordássemos com a filosofia maniqueísta contida na justificação da quarta regra (podíamos muito bem imaginar três pessoas inimigas entre si).

Considerações sociais à parte, o que os preceitos acima dizem é que multiplicar por  $-1$  significa “trocar o sinal” e, evidentemente, trocar o sinal duas vezes equivale a deixar como está. Mas geralmente, multiplicar por  $-a$  quer dizer multiplicar por  $(-1)a$ , ou seja, primeiro por  $a$  e depois

por  $-1$ , logo multiplicar por  $-a$  é o mesmo que multiplicar por  $a$  e depois trocar o sinal. Daí resulta que  $(-a)(-b) = ab$ .

Tudo isto está muito claro e as manipulações com números relativos, a partir daí, se desenvolvem sem maiores novidades. Mas, nas cabeças das pessoas mais inquisidoras, resta uma sensação de “magister dixit”, de regra outorgada pela força. Mais precisamente, insinua-se a dúvida: será possível *demonstrar*, em vez de impor, que  $(-1)(-1) = 1$ ?

Não se pode demonstrar algo a partir do nada. Para provar um resultado, é preciso admitir uns tantos outros fatos como conhecidos. Esta é a natureza da Matemática. Todas as proposições matemáticas são do tipo “se isto então aquilo”. Ou seja, admitindo isto como verdadeiro, provamos aquilo como consequência.

Feitas estas observações filosóficas, voltemos ao nosso caso. Gostaríamos de provar que  $(-1)(-1) = 1$ . Que fatos devemos admitir como verdadeiros para demonstrar, a partir deles, estas igualdades?

De modo sucinto, podemos dizer que  $(-1)(-1) = 1$  é uma consequência da lei distributiva da multiplicação em relação à adição, conforme mostraremos a seguir.

Nossa discussão tem lugar no conjunto  $Z$  dos números inteiros (relativos), onde cada elemento  $a$  possui um simétrico (ou inverso aditivo)  $-a$ , o qual cumpre a condição  $-a + a = a + (-a) = 0$ . Daí resulta que o simétrico  $-a$ , é caracterizado por essa condição. Mais explicitamente, se  $b + x = 0$ , então  $x = -b$ , como se vê somando,  $-b$  a ambos os membros. Em particular, como  $-a + a = 0$ , concluímos que  $a = -(-a)$ , ou seja, que o simétrico de  $-a$  é  $a$ .

Uma primeira consequência da distributividade da multiplicação é o fato de que  $a \cdot 0 = 0$ , seja qual for o número  $a$ .

Com efeito,

$$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a(1 + 0) = a \cdot 1 = a = a + 0.$$

Assim,

$$a + a \cdot 0 = a + 0,$$

logo

$$a \cdot 0 = 0.$$

Agora podemos mostrar que  $(-1) \cdot a = -a$  para todo número  $a$ .

Com efeito,

$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1)a = [1 + (-1)] \cdot a = 0 \cdot a = 0,$$

logo  $(-1) \cdot a$  é o simétrico de  $a$ , ou seja,  $(-1)a = -a$ .

Em particular,  $(-1)(-1) = -(-1) = 1$ . Daí resulta, em geral, que  $(-a)(-b) = ab$ , pois

$$(-a) \cdot (-b) = (-1)a \cdot (-1)b = (-1)(-1)ab = ab.$$

### 3. Por que $(-1)(-1) = 1$ ? (continuação)

Alguns leitores escreveram sobre a demonstração da “regra dos sinais” dada no número 1 da RPM. Numeremos as cartas:

1. Pedro Paulo, de Ubatuba, SP, achou a demonstração “muito algebrista e cansativa”. Sugere uma alternativa geométrica, baseada no diagrama abaixo, onde os segmentos inclinados são paralelos. Diz que leu esta explanação numa revista estrangeira, cujo nome não se lembra mais.

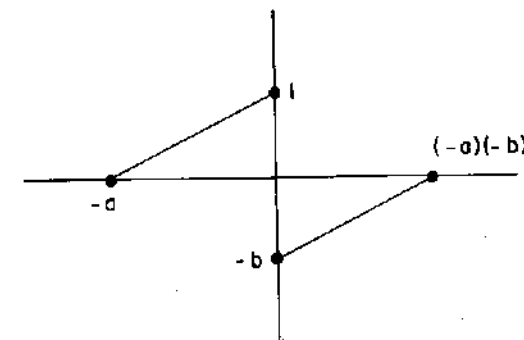


Figura 1.

2. Léa Santos, de São Paulo, Capital, lembra a seguinte ilustração, que leu no livro de Morris Kline “O fracasso da Matemática Moderna”, página 191. “... um ganho será representado por um número positivo e a perda por um número negativo. Igualmente, o tempo no futuro será representado por um número positivo e no passado por um número negativo. ... Se perde 5 dólares por dia, então daqui a 3 dias terá perdido 15 dólares...  $(-5)(+3) = -15$ ... se perde 5 dólares por dia, então há 3 dias atrás estava 15 dólares mais rico...

$$(-5)(-3) = +15''.$$

3. Marcelo Lellis, de São Paulo, Capital, apresenta uma proposta didática, que atribui ao Professor A. Bloch, para justificar que o produto de dois números negativos seja positivo. Ele parte da observação que  $(-2) \cdot 3 = -6$ ,  $(-2) \cdot 2 = -4$ ,  $(-2) \cdot 1 = -2$ ,  $(-2) \cdot 0 = 0$  e, notando que esses produtos crescem, ("de dois em dois") é natural esperar que a regra se mantenha e sejam  $(-2)(-1) = 2$ ,  $(-2)(-2) = 4$ , etc.
4. Fred Gusmão dos Santos, de Mogi das Cruzes, SP, dá a seguinte versão de como obter a regra dos sinais. Em primeiro lugar, como  $5 \cdot (2 - 2) = 0$ , pela lei distributiva vem  $5 \cdot 2 + 5 \cdot (-2) = 0$ , ou  $10 + 5 \cdot (-2) = 0$ , logo  $5 \cdot (-2) = -10$ . Em seguida, como  $-5(2 - 2) = 0$ , novamente temos  $-5 \cdot 2 + (-5)(-2) = 0$ , ou seja  $-10 + (-5)(-2) = 0$ , logo  $(-5)(-2) = 10$ .

Antes de mais nada, queremos agradecer a todos os que nos escreveram. Isto nos faz sentir que estamos alcançando nossos objetivos.

Em seguida, é bom enfatizar que as explicações contidas na seção "Conceitos e Controvérsias" visam ilustrar, esclarecer e orientar o professor de Matemática, para que, conhecendo melhor a matéria que ensina, possa desempenhar sua missão com a tranqüila confiança de quem sabe sobre o que está falando. Tais explicações não são oferecidas como propostas didáticas. Isto nos parecia óbvio mas parece que nem todos entenderam assim.

Vamos, agora, responder brevemente às cartas:

1. Pedro Paulo: É natural que um fato algébrico tenha uma demonstração algébrica; quanto ao cansaço, trata-se certamente de uma sensação pessoal. Seu argumento geométrico é bem interessante. Só que ele só pode ser apresentado a alunos que, pela série em que estão, já aprenderam a regra dos sinais. Além disso, para provar que aquele ponto lá tem mesmo abscissa igual a  $(-a)(-b)$ , você vai ter que usar a dita regra...
2. Léa Santos: Sua sugestão é muito boa. Pode ser utilizada com êxito, inclusive porque contribui para que os alunos entendam melhor o uso de números negativos em problemas concretos.
3. Marcelo Lellis: Imagino que o Prof. Bloch começava sua explanação justificando que  $(-)(+) = (-)$ . Isto pode ser feito da mesma maneira como você fez para chegar a  $(-)(-) = (+)$ . Não sei se você notou que seu argumento usa implicitamente a lei distributiva. Neste

sentido, parece-nos que a sugestão seguinte é mais convincente.

4. Fred Gusmão dos Santos: Muito boa a sua apresentação. Aliás, não poderíamos deixar de elogiá-la, já que ela constitui uma reformulação, em termos numéricos, do argumento usado na demonstração dada em "Conceitos e Controvérsias" nº 2.

Para finalizar, gostaríamos de recomendar a todos aqueles genuinamente interessados em aperfeiçoar suas técnicas de ensino, a leitura do livro "Aplicações da Teoria de Piaget ao Ensino da Matemática", de autoria do Professor Luiz Alberto dos Santos Brasil (Editora Forense-Universitária, Rio de Janeiro, 1977). Nas páginas 161 e 162 desse livro, o leitor encontrará exemplos de problemas concretos que motivam a regra dos sinais.

#### 4. Qual é o valor de $0^0$ ?

A resposta mais simples é:  $0^0$  é uma expressão sem significado matemático. Uma resposta mais informativa seria:  $0^0$  é uma expressão indeterminada.

Para explicar estas respostas, talvez seja melhor examinar dois exemplos mais simples de fórmulas desprovidas de significado matemático, que são  $\frac{0}{0}$  e  $\frac{1}{0}$ . De acordo com a definição de divisão,  $\frac{a}{b} = c$  significa que  $a = b \cdot c$ . Portanto, se escrevêssemos  $\frac{0}{0} = x$  e  $\frac{1}{0} = y$ , estas igualdades significariam que  $0 = 0 \cdot x$  e  $1 = 0 \cdot y$ . Ora TODO número  $x$  é tal que  $0 \cdot x = 0$  e NENHUM número  $y$  é tal que  $0 \cdot y = 1$ . Por isso se diz que  $\frac{0}{0}$  é uma "expressão indeterminada" e que  $\frac{1}{0}$  é uma "divisão impossível". (Mais geralmente, toda divisão do tipo  $\frac{a}{0}$ , com  $a \neq 0$  é impossível.)

Voltando ao símbolo  $0^0$ , lembramos que as potências de expoente zero foram introduzidas a fim de que a fórmula  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ , que é evidente quando  $m > n$ , continue ainda válida para  $m = n$ . Pondo  $a^m = b$  teremos então  $\frac{b}{b} = b^0$ , logo  $b^0 = 1$  se  $b \neq 0$ . No caso  $b = 0$ , a igualdade  $\frac{b}{b} = b^0$  tomaria a forma  $\frac{0}{0} = 0^0$ , o que leva a considerar  $0^0$  como uma expressão indeterminada.

Esta conclusão é ainda reforçada pelo seguinte argumento: como

$0^y = 0$  para todo  $y \neq 0$ , seria natural pôr  $0^0 = 0$ ; por outro lado, como  $x^0 = 1$  para todo  $x \neq 0$ , seria também natural pôr  $0^0 = 1$ . Logo, o símbolo  $0^0$  não possui um valor que se imponha naturalmente, o que nos leva a considerá-lo como uma expressão indeterminada.

As explicações acima têm caráter elementar e abordam o problema das expressões indeterminadas a partir da tentativa de estender certas operações aritméticas a casos que não estavam enquadrados nas definições originais dessas operações. Existe, porém, uma razão mais profunda, advinda da teoria dos limites, em virtude da qual  $\frac{0}{0}$  e  $0^0$ , (bem como outras fórmulas análogas) são expressões indeterminadas.

Escreve-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  para significar que o número  $A$  é o limite para o qual tende o valor  $f(x)$  da função  $f$  quando  $x$  se aproxima de  $a$ . Sabe-se que se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = A/B$ , desde que seja  $B \neq 0$ . Por outro lado, quando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  então nada se pode garantir a respeito do limite do quociente  $f(x)/g(x)$  quando  $x$  se aproxima de  $a$ . Dependendo das funções  $f$  e  $g$  que se escolham, pode-se conseguir que o quociente  $f(x)/g(x)$  tenha como limite qualquer valor  $c$  dado de antemão, ou mesmo que não tenda para limite algum. Por exemplo, se tomarmos  $f(x) = c(x - a)$  e  $g(x) = x - a$  então  $f(x)/g(x) = c$  para todo  $x \neq a$ , logo  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = c$ . Por este motivo se diz que  $0/0$  é uma expressão indeterminada.

Analogamente, dado a priori qualquer número real  $c > 0$ , podemos achar funções  $f, g$  tais que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , enquanto  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = c$ . Basta, por exemplo, tomar  $f(x) = x$  e  $g(x) = \log c / \log x$ ; isto faz com que  $f(x)^{g(x)} = x^{\log c / \log x} = c$  para todo  $x > 0$ , logo  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)} = c$ . (Para convencer-se de que  $x^{\log c / \log x} = c$ , tome logaritmos de ambos os membros desta igualdade.)

Portanto, quando  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  então  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$  pode ter qualquer valor  $c$ , dado de antemão, desde que escolhamos convenientemente as funções  $f$  e  $g$ . Então se diz que  $0^0$  é uma expressão indeterminada.

## 5. Qual a diferença entre círculo e circunferência?

Nosso quarto tópico é uma pergunta enviada pela professora Susi Pozza, de Piraju, SP. Podemos resumi-la assim:

Explica a Professora Susi que os guias curriculares para as matérias do 1º grau orientam os professores a não fazer distinção entre circunferência e círculo, alegando que não há tal diferenciação no caso de polígonos (fala-se tanto no *perímetro* como na *área* de um polígono). Mas todos os livros de 2º grau que a professora já viu fazem a distinção: circunferência é a linha, círculo é a região limitada pela circunferência. Daí sua perplexidade.

No meu caso pessoal, Susi, ocorreu o oposto, ou quase. No ginásio e no colégio me ensinaram a distinguir entre circunferência e círculo. Na universidade, e em livros estrangeiros mais avançados, essa diferença desapareceu. Para ser mais exato, o que desapareceu quase inteiramente foi a palavra “circunferência”. Quanto ao termo “círculo” ele tornou-se ambíguo (como “polígono”); ora quer dizer a curva, ora a região por ela limitada.

Para livrar-se da ambigüidade, quando isso é necessário, costuma-se usar a palavra “disco” para significar a região do plano limitada por uma circunferência. Aí não resta dúvida.

Em resumo: *circunferência* e *disco* são palavras de sentido bastante claro, cada uma com um único significado na língua portuguesa. Por outro lado, *círculo* é uma palavra que tanto pode ser empregada no sentido de circunferência como no sentido de disco. (Paciência...)

Quanto à orientação dada pelos guias curriculares, ela contém uma atitude bem razoável. Afinal de contas, não é só “polígono” que quer dizer tanto a linha poligonal como a região que ela limita. Também *poliedro*, *prisma*, *cilindro*, *esfera*, etc. às vezes são superfícies (pois têm área) e às vezes são corpos sólidos, pois têm volume. No caso da esfera, a palavra *bola* pode ser usada para significar o sólido, ficando *esfera* para a superfície, mas nos outros casos não há distinção.

O melhor a fazer na sala de aula é aceitar a terminologia do livro adotado, que deve ser sensata. (Se não for, troque de livro.) Caso ache necessário, esclareça aos alunos que a nomenclatura não é universal, havendo quem prefira outros nomes para indicar as mesmas coisas.

O mais importante é ser coerente com a linguagem que você escolheu, a fim de evitar mal-entendidos. Lembrar sempre o que Humpty Dumpty falou para Alice (no País das Maravilhas): “Quando eu uso uma palavra, ela significa exatamente aquilo que eu decidi que ela significasse – nem mais nem menos”. (E lembrar também de avisar aos seus ouvintes qual foi esse significado escolhido.)

## 6. Que significa a igualdade $\frac{1}{9} = 0,111\dots$ ?

Esta é uma das dez perguntas que apresentei no folheto de lançamento da RPM, visando dar uma idéia de como seria a seção “Conceitos e Controvérsias” da nova Revista.

Depois disso, os leitores Mário Servelli Rosa (de São Paulo, SP), Eliane M.S. Montese Silva (de Ubá, MG) e Leni Brandão Barletta (de Bragança Paulista, SP) escreveram pedindo que eu esclarecesse o sentido de igualdades do tipo  $1 = 0,999\dots$  ou  $32,8 = 32,7999\dots$

Há, de fato, motivo para perplexidade nas fórmulas acima. Examinemos, uma a uma, as igualdades

$$\begin{aligned}\frac{1}{9} &= 0,111\dots \\ 1 &= 0,999\dots \\ 32,8 &= 32,799\dots\end{aligned}$$

Na primeira delas, temos uma fração ordinária irredutível, cujo denominador não é uma potência de 10, igual a algo que nos parece uma fração decimal. Na segunda, temos um número inteiro igual a uma fração decimal (ou algo semelhante). Na terceira, vemos duas frações decimais de aspectos diferentes mas declaradas iguais.

Certamente há razão para dúvidas. Como ensinar isso a nossos alunos sem antes entendermos bem o que estamos querendo ensinar?

O problema todo se situa nas expressões que parecem nos segundos membros das igualdades acima: as chamadas “dízimas periódicas”. Se as interpretarmos corretamente, as dificuldades desaparecerão.

As dízimas periódicas surgiram como um recurso para socorrer a quem procura realizar a tarefa impossível de transformar certas frações ordinárias, como  $1/9$ ,  $3/11$  ou  $4/15$  em frações decimais.

Uma fração decimal é, por definição, uma fração (ordinária) cujo denominador é uma potência de 10. Assim, por exemplo,  $3/10$ ,  $152/100$  e  $13/1000$  são frações decimais.

Algumas frações, como  $3/5$ ,  $7/20$  e  $6/25$ , não são, estritamente falando, decimais (pois seus denominadores não são potências de 10) mas podem ser escritas como (isto é, são equivalentes a) frações decimais.

Assim, temos

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}, \quad \frac{7}{20} = \frac{35}{100} \quad \text{e} \quad \frac{6}{25} = \frac{24}{100}.$$

Por outro lado, não existe fração decimal alguma equivalente à fração irredutível  $3/11$ . Com efeito, as únicas frações equivalentes a  $3/11$  são as da forma  $3n/11n$ , obtidas multiplicando-se o numerador 3 e o denominador 11 pelo mesmo número natural  $n$ . Ora, qualquer que seja nossa escolha de  $n$ , o denominador  $11n$  jamais será uma potência de 10. O mesmo raciocínio se aplica às frações  $1/9$  e  $4/15$ .

Mais geralmente, o argumento acima prova que uma fração irredutível cujo denominador contenha algum fator primo diferente de 2 ou 5 não é equivalente a uma fração decimal. (Pois 2 e 5 são os únicos fatores primos que ocorrem numa potência de 10.)

Desde a publicação da Aritmética do holandês Simon Stevin (em 1585), sabe-se da grande vantagem prática das frações decimais. É fácil escrevê-las; é trivial compará-las; é muito mais fácil realizar com elas as operações aritméticas usuais do que efetuar as mesmas operações com frações ordinárias (principalmente somar e subtrair).

Pode-se mesmo dizer, sem cometer exagero, que o uso das frações decimais foi um grande fator de progresso para a Astronomia, para a Navegação e, conseqüentemente, para a Humanidade, de um modo geral. Para que tal adoção se desse foi necessário, entretanto, encontrar um meio de representar *qualquer* fração sob forma decimal.

Um momento: não vimos acima que nenhuma fração decimal é equivalente a  $3/11$ ? É verdade. Mas, mesmo assim,  $3/11$  pode ser escrita “sob forma decimal”. O segredo está em admitir frações decimais *ilimitadas*.

Vejamos como.

A maneira bem conhecida de transformar uma fração ordinária como  $3/11$  em fração decimal consiste em escrever 3 como 3,0 ou 3,00 ou 3,000 etc (o número de zeros fica a nosso critério) e efetuar a divisão por 11. Se tomarmos 4 zeros, por exemplo, obteremos o quociente 0,2727 e, no lugar do resto, aparece o algarismo 3. Isto quer dizer que o resto é 0,0003 (já que fomos até décimos milésimos). Como o dividendo é igual ao divisor vezes o quociente mais o resto, temos

$$3,0000 = 11 \times 0,2727 + 0,0003.$$

Dividindo ambos os membros desta igualdade por 11 e escrevendo 0,0003 sob forma de fração ordinária, obtemos:

$$\frac{3}{11} = 0,2727 + \frac{3}{110000}.$$

Isto quer dizer que, se substituirmos a fração ordinária  $3/11$  pela fração decimal 0,2727, cometeremos um erro igual a  $3/110000$ .

O mesmo raciocínio mostra que, em geral, se em lugar de  $3/11$  escrevermos a fração decimal 0,2727...27 (com o "período" 27 repetido  $n$  vezes) o erro cometido será uma fração cujo numerador é 3 e cujo denominador é  $11 \times 10^{2n}$ . Este erro se torna cada vez menor, a medida que  $n$  cresce. Tomando  $n$  suficientemente grande, podemos tornar o erro tão pequeno quanto desejemos.

Assim, as frações decimais

$$(*) \quad 0,27 \quad 0,2727 \quad 0,272727 \quad \text{etc.}$$

constituem valores aproximados da fração ordinária  $3/11$ . Quanto maior for o número de algarismos decimais tomados, menor será o erro cometido (isto é, melhor será a aproximação). Por isso, quando escrevemos

$$\frac{3}{11} = 0,2727\dots$$

não estamos afirmando que  $3/11 = 0,2727$ . As reticências no fim do símbolo 0,2727... significam que ele não representa uma única fração decimal mas a seqüência infinita de frações decimais (\*) acima, as quais são valores aproximados de  $3/11$ .

À luz dessas considerações, analisemos a igualdade  $\frac{1}{9} = 0,111\dots$ . Temos a seqüência infinita de frações decimais

$$0,1 \quad 0,11 \quad 0,111 \quad 0,1111 \quad \text{etc.}$$

Cada uma dessas frações decimais é um valor aproximado para  $1/9$ . Tomando um número suficientemente grande de algarismos decimais, podemos tornar esta aproximação tão precisa quanto desejemos. Por exemplo, escrevendo 0,11111 em vez de  $1/9$  estaremos cometendo um erro igual a

$$\frac{1}{9} - 0,11111 = \frac{1}{9} - \frac{11111}{100000} = \frac{1}{900000}.$$

Explicação análoga vale para a igualdade  $1 = 0,999\dots$ . A seqüência infinita de frações decimais

$$0,9 \quad 0,99 \quad 0,999 \quad 0,999 \quad \text{etc}$$

fornece valores aproximados para o número 1. Por exemplo, a diferença  $1 - 0,999999$  é igual a 1 milionésimo.

Finalmente, a igualdade  $32,8 = 32,799\dots$  significa que a diferença entre 32,8 e  $32,799\dots 9$  (com  $n$  algarismos iguais a 9) pode ser tornada tão pequena quanto se deseje, desde que se tome um número  $n$  suficientemente grande.

Com esta discussão, esperamos ter esclarecido o significado da igualdade que encabeça este tópico, bem como das outras duas, sugeridas pelos colegas que nos escreveram.

Mas, para encerrar o assunto, convém lembrar que nem todas as frações decimais infinitas são periódicas.

A periodicidade só aparece quando procuramos representar uma fração ordinária (número racional) sob forma decimal. Mas há certos números importantes em Matemática, como  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sqrt{2}$ , etc que não são racionais, isto é, não podem ser expressos como quociente de dois números naturais. Eles são chamados *números irracionais*. Cada um deles é representado por uma fração decimal infinita não-periódica.

Vejamos  $\pi$ , por exemplo. Este número é, por definição, a área de um círculo de raio 1 (ou, se preferirem, o comprimento de uma circunferência de raio  $1/2$ ).

Inscrevendo no círculo de raio 1 polígonos regulares cujo número de lados tomamos cada vez maior, as áreas desses polígonos representam valores aproximados para a área do círculo, isto é, para o número  $\pi$ .

Por esse método, ou por outros métodos muito mais sofisticados, conhecem-se hoje valores aproximados de  $\pi$  com erros extremamente pequenos. Mais ainda: desde o tempo de Arquimedes (cerca de 250 anos antes de Cristo) se conhecem algoritmos (isto é, processos sistemáticos de cálculo) que permitem determinar frações que aproximam  $\pi$  com a precisão que se deseje.

Quando, por exemplo, escrevemos  $\pi = 3,14159265\dots$  devemos entender que o segundo membro desta igualdade representa uma seqüência infinita de frações decimais cujos primeiros termos são

$$3 \quad 3,1 \quad 3,14 \quad 3,141 \quad 3,1415 \quad 3,14159 \quad \text{etc.}$$

Cada fração desta seqüência representa um valor aproximado de  $\pi$ , ou seja, da área do círculo de raio 1. Além disso, os algarismos de cada fração são *exatos*, isto é, só se pode obter uma aproximação melhor, por falta, acrescentando novos algarismos decimais, sem alterar os que já estão lá. Na seqüência acima não haverá periodicidade, uma vez que já foi demonstrado (de maneira teórica, com base na Análise Matemática) que  $\pi$  não é um número racional. Considerações análogas podem ser feitas sobre os números  $e$ ,  $\sqrt{2}$ , etc.

## 7. Dúvidas sobre dízimas

A transformação de frações ordinárias em decimais, dando origem ao fenômeno curioso das chamadas dízimas periódicas, é sem dúvida um assunto que provoca questões, suscita controvérsias e gera problemas. Alguns colegas têm escrito com perguntas sobre o assunto.

Duas das mais interessantes entre essas perguntas foram feitas por Sun Hsien Ming, de São Paulo, SP.

Elas são:

1<sup>a</sup>) Existe alguma fração ordinária tal que, dividindo-se o numerador pelo denominador, obtenha-se a dízima periódica 0,999...?

A resposta é NÃO. Se  $a$  e  $b$  forem números naturais com  $a/b = 0,999\dots$  então  $10a/b = 9,999\dots$ . Subtraindo membro a membro estas igualdades vem  $9a/b = 9$ , donde  $a/b = 1$ , isto é,  $a = b$ . Mas é claro que, dividindo  $a$  por  $a$  obteremos 1, e não 0,999...

Na realidade, existe um modo meio heterodoxo de dividir  $a$  por  $a$  e obter 0,999... como quociente. Normalmente, numa divisão, exigimos que o resto seja inferior ao divisor. Se admitirmos, restos iguais ao divisor, ao efetuar uma divisão, por exemplo, de 7 por 7 teremos

$$\begin{array}{r|l} 7,0 & 7 \\ \hline 70 & 0,9999 \\ 70 & \\ \hline & 7 \end{array}$$

Uma pergunta semelhante (mais geral) com a mesma resposta, poderia ter sido feita: ao transformar uma fração ordinária  $a/b$  em decimal, por meio da divisão prolongada, pode-se obter no quociente uma dízima periódica que termine com 999...? Por exemplo, pode-se encontrar um

quociente igual a 0,7499...? Se fizermos a divisão como de costume (resto sempre menor do que divisor) a resposta é não. Mas, se admitirmos restos iguais ao divisor, dividindo 3 por 4 obteremos 0,74999... como se vê na conta seguinte

$$\begin{array}{r|l} 3,0 & 4 \\ \hline 20 & 0,7499 \\ 40 & \\ 40 & \\ \hline & 4 \end{array}$$

Outra maneira de mostrar que, dividindo-se (da maneira correta)  $a$  por  $b$  nunca se chega a uma dízima de período 9 é a seguinte. Suponhamos, inicialmente, que  $0 < b < 10$ , isto é, que  $b$  tenha apenas um algarismo. Na divisão prolongada de  $a$  por  $b$ , a partir do momento em que se baixa o primeiro zero já não se pode mais obter 9 no quociente. Por exemplo, suponha  $b = 7$ . No final da divisão, o maior resto possível seria 6. Baixando-se um zero tem-se 60, que dividido por 7 dá 8, e não 9. Daí por diante, continua-se a baixar zeros e nunca mais se encontra 9 no quociente. Se o número  $b$  tiver dois algarismos, pode ser que, ao baixar o primeiro zero, se encontre 9 no quociente. Mas do segundo zero em diante o maior algarismo do quociente será 8. Por exemplo, se vamos transformar  $47/12$  em fração decimal, fazemos a conta abaixo:

$$\begin{array}{r|l} 47 & 12 \\ \hline 110 & 3,916 \\ 020 & \\ 80 & \\ \hline & 8 \end{array}$$

que nos conduz à dízima periódica 3,91666... Note que obtivemos um 9 depois de baixar o primeiro zero.

A situação é geral: se  $b$  tem  $n$  algarismos decimais, ao dividirmos continuamente  $a$  por  $b$  poderemos, no máximo, encontrar  $n - 1$  vezes o algarismo nove depois que baixarmos o primeiro zero. Nunca se obtém uma dízima cujo período seja 9.

A segunda pergunta de Sun Ming é:

2<sup>a</sup>) O fato de a mesma fração ordinária poder ter duas representações decimais distintas (como  $2/5 = 0,4000\dots = 0,3999\dots$ ) não apresenta inconveniente nem origina paradoxos?

No item número 6 destes “Conceitos e Controvérsias” está escrito que as frações ordinárias que, ao serem transformadas em decimais, têm um desenvolvimento limitado (isto é, o processo continuado de divisão do numerador pelo denominador conduz eventualmente a um resto zero) são aquelas que, postas sob forma irredutível, apresentam no denominador o produto de uma potência de 2 por uma potência de 5. Todas essas frações irredutíveis do tipo  $m/2^a \cdot 5^b$  podem ser representadas de duas maneiras diferentes como fração decimal.

Por exemplo, temos  $1/4 = 0,25 = 0,24999\dots$  ou  $2/5 = 0,4 = 0,3999\dots$

A regra geral é fácil: toda fração decimal “exata” pode ser também escrita como dízima periódica subtraindo-se uma unidade do seu último algarismo não nulo e acrescentando-se uma seqüência infinita de algarismos 9.

Seria bom que a correspondência entre números racionais e frações decimais periódicas (dízimas) fosse biunívoca. Mas não é. Caso insistamos muito em ter sua biunivocidade, vamos ter que fazer um sacrifício para obtê-la. Um sacrifício possível seria abster-se de considerar decimais “exatas”, substituindo sempre todas as frações do tipo  $5,183$  por  $5,182999\dots$  (por exemplo). O outro seria excluir as dízimas que terminam com uma fileira de noves, substituindo-as sempre pela decimal exata obtida suprimindo os nove e somando 1 ao último algarismo que os precede; isto corresponderia a escrever sempre 0,7 em vez de 0,6999... Nenhuma dessas escolhas é muito natural. Por isso me parece mais razoável que nos resignemos com a falta de biunivocidade. Há coisas piores no mundo.

## 8. Voltando a falar sobre dízimas

Já escrevemos duas vezes sobre este tópico nesta seção.

Restam porém alguns fatos que ainda não foram esclarecidos aqui. Procuraremos agora completar a discussão analisando-os.

Usualmente, as propriedades das dízimas periódicas são estabelecidas a partir do algoritmo de divisão prolongada, usado para transformar uma

fração ordinária em decimal, no qual se acrescentam sucessivos zeros ao dividendo para continuar o processo de divisão. Os resultados obtidos são os seguintes:

1. Uma fração ordinária irredutível  $p/q$ , quando transformada em decimal, gera uma fração decimal exata (finita) ou uma dízima periódica. O primeiro caso ocorre quando  $q$  é da forma  $2^m 5^n$  e o segundo quando  $q$  é divisível por algum número primo diferente de 2 ou 5.
2. Quando o denominador  $q$  é primo com 10, a dízima periódica gerada pela fração irredutível  $p/q$  é *simples*, isto é, o período começa no primeiro algarismo decimal.
3. Se o denominador  $q$  é divisível por 2 ou por 5 e, além disso, por outro número primo, a dízima periódica gerada pela fração irredutível  $p/q$  é *composta*, isto é, a parte decimal começa com alguns algarismos não periódicos, seguidos dos algarismos periódicos. O número de algarismos não periódicos é igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou de 5 pela qual  $q$  é divisível.

Seguiremos um caminho diferente do usual para chegar a esses resultados. Tomaremos como ponto de partida os dois lemas abaixo.

**Primeiro Lema.** *Todo número natural  $q$ , primo com 10, tem um múltiplo cuja representação decimal é formada apenas por noves.*

**Demonstração:** Há uma infinidade de números, tais como 9, 99, 999, etc, formados apenas por algarismos 9. Quando divididos por  $q$ , esses números deixam restos que vão de 0 a  $q - 1$ , ao todo um número finito de restos possíveis. Logo, existem dois números formados por noves, os quais divididos por  $q$  deixam o mesmo resto. A diferença entre esses dois números é, por um lado, divisível por  $q$  e, por outro lado, um número formado por uma série de nove seguidos por uma série de zeros. Tem-se então  $n \cdot q = 99\dots 90\dots 0 = 99\dots 9 \times 10^m$ . Assim,  $q$  divide o produto  $99\dots 9 \times 10^m$  e, como é primo com  $10^m$ , concluímos que  $q$  divide  $99\dots 9$ .

**Observação:** O primeiro lema continua válido (com a mesma demonstração) se, em vez de 9, tomarmos qualquer algarismo decimal diferente de 0. Nossa preferência por 9 será justificada logo mais.

**Segundo Lema.** *Todo número natural  $q$  tem um múltiplo cuja representação decimal é formada por uma série de noves seguidos por uma série de zeros. O menor múltiplo de  $q$  desta forma termina com um número de*

zeros igual ao maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pela qual  $q$  é divisível.

**Demonstração:** Temos  $q = 2^a \cdot 5^b \cdot q'$ , onde  $q'$  é primo com 10. Para fixar idéias, suponhamos  $a > b$ . Então  $a$  é o maior expoente de uma potência de 2 ou 5 pela qual  $q$  é divisível. Seja  $n$  o menor número natural tal que  $n \cdot q' = 99 \dots 9$ . Então o menor múltiplo de  $q$  formado por nove seguidos de zeros é

$$5^{a-b} \cdot n \cdot q = 10^a \cdot nq' = 99 \dots 90 \dots 0 \quad (\text{com } a \text{ zeros no final}).$$

Desses lemas resulta imediatamente o

**Teorema.** Toda fração irredutível  $p/q$  é equivalente a uma fração cujo denominador tem uma das formas  $10 \dots 0, 99 \dots 9$  ou  $99 \dots 90 \dots 0$ .

Ocorrem os seguintes casos:

- 1) Se  $q = 2^a \cdot 5^b$  então  $\frac{p}{q} = \frac{n}{10 \dots 0}$ ;
- 2) Se  $q$  é primo com 10 então  $\frac{p}{q} = \frac{n}{99 \dots 9}$ ;
- 3) Se  $q = 2^a \cdot 5^b \cdot q'$  onde  $q'$  é primo com 10, então  $\frac{p}{q} = \frac{n}{99 \dots 90 \dots 0}$ .

Nos casos 1 e 3), se o numerador  $n$  não terminar em zero, o número de zeros do denominador é igual ao maior dos expoentes  $a$  ou  $b$ .

**Demonstração:** Basta multiplicar o numerador e o denominador da fração  $p/q$  pelo mesmo número, escolhido de modo que o novo denominador tenha a forma desejada, o que é possível em virtude dos lemas anteriores.

Na prática, suponhamos dada a fração  $2/37$ . Para obter uma fração do tipo  $n/99 \dots 9$  equivalente a ela, devemos efetuar a divisão prolongada de 99 por 37, acrescentando NOVES ao dividendo até obtermos um resto igual a zero! Isto é sempre possível, em virtude do primeiro lema. Vejamos:

$$\begin{array}{r} 99 \overline{) 37} \\ 259 \quad 27 \\ 27 \\ \hline 00 \end{array}$$

Então  $37 \times 27 = 999$  e daí  $\frac{2}{37} = \frac{2 \times 27}{37 \times 27} = \frac{54}{999}$ .

Se a fração dada for, por exemplo,  $3/260$ , estamos no caso 3) e facilmente o reduzimos ao anterior. Temos  $260 = 2^2 \times 5 \times 13$ . Começamos com  $3/13$ . A divisão prolongada (acrescentando-se noventa ao dividendo) nos dá:

$$\begin{array}{r} 99 \overline{) 13} \\ 089 \quad 76923 \\ 119 \\ 029 \\ 039 \\ \hline 00 \end{array}$$

Portanto  $13 \times 76923 = 999999$ . Daí resulta que

$$\frac{3}{260} = \frac{3}{20 \times 13} = \frac{15}{100 \times 13} = \frac{15 \times 76923}{100 \times 13 \times 76923} = \frac{1153845}{99999900}$$

Vejamos agora o que acontece quando se procura transformar a fração ordinária  $p/q$  em decimal. Em primeiro lugar, se  $q = 2^a \cdot 5^b$  então  $p/q = 5^{b-a} \cdot p/10^a$  se  $a > b$  e  $p/q = 2^{a-b} \cdot p/10^b$  se  $b > a$ . Neste caso, obtemos uma decimal exata, ou finita.

Em seguida, suponhamos que o denominador  $q$  da fração  $p/q$  seja primo com 10. Pelo teorema acima,  $p/q$  é equivalente a uma fração da forma  $n/99 \dots 9$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que a fração dada é própria. Se  $p/q$  for imprópria, separamos a parte inteira para colocar antes da vírgula.

É neste ponto que se revela a importância do algoritmo nove nas considerações sobre passagem de fração ordinária a decimal e vice-versa.

Temos a fração  $n/99 \dots 9$ , cujo denominador tem  $m$  algarismos iguais a 9. Sendo ela própria, seu numerador  $n$  é um número de, no máximo,  $m$  algarismos. Completando-o com zeros à esquerda, podemos admitir que  $n$  tem exatamente  $m$  algarismos. Com esta convenção, podemos afirmar que, transformando  $n/99 \dots 9$  em fração decimal, obtemos a dízima periódica  $0, nnn \dots$ .

Por exemplo,  $5/9 = 0,555 \dots$ ,  $5/99 = 0,050505 \dots$ ,  $13/999 = 0,013013013 \dots$  etc.

A prova dessa afirmação se baseia na fórmula que dá a soma dos termos de uma progressão geométrica ilimitada. Segundo ela, se  $0 < a <$

1 então

$$\frac{a}{1-a} = a + a^2 + a^3 + \dots$$

Em particular, temos:

$$\begin{aligned} \frac{5}{9} &= \frac{5}{10-1} = 5 \times \frac{1}{10-1} = 5 \times \frac{1/10}{1-1/10} \\ &= 5 \cdot \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) \\ &= \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{5}{10^3} + \dots = 0,555\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{13}{999} &= \frac{13}{1000-1} = 13 \times \frac{1/1000}{1-1/1000} \\ &= 13 \cdot \left( \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^9} + \dots \right) \\ &= 0,013013013\dots \end{aligned}$$

Finalmente, se a fração própria irredutível  $p/q$  tem o denominador  $q$  divisível por 2 ou por 5 e, além disso, por outro primo diferente destes, então  $p/q$  é equivalente a uma fração do tipo  $n/99\dots90\dots0$  onde podemos admitir que o numerador  $n$  não termina em 0. Neste caso, ao transformar  $p/q$  em decimal, obtemos uma dízima periódica composta na qual a parte não periódica tem tantos algarismos quantos são os zeros do denominador acima. Para ver isto, basta escrever (supondo que são  $m$  zeros):

$$\frac{n}{99\dots90\dots0} = \frac{1}{10^m} \left( \frac{n}{99\dots9} \right)$$

e recair no caso anterior. Evidentemente,  $n/99\dots9$  agora pode não ser uma fração própria mas sua parte inteira tem no máximo  $m$  algarismos (já que a fração original era própria). Então, completando a parte inteira de  $n/99\dots9$  com zeros à esquerda, podemos admitir que ela tem  $m$  algarismos e estes serão precisamente os algarismos não periódicos. Este caso fica bem mais fácil de entender com alguns exemplos concretos,

como os que mostramos abaixo

$$\begin{aligned} \frac{23}{90} &= \frac{1}{10} \times \frac{23}{9} = \frac{1}{10} \times 2\frac{5}{9} = \frac{1}{10} \times 2,555\dots = 0,2555\dots \\ \frac{4}{900} &= \frac{1}{100} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{100} \times 0,444\dots = 0,00444\dots \\ \frac{358}{9900} &= \frac{1}{100} \times \frac{358}{99} = \frac{1}{100} \times 3\frac{61}{99} = \frac{1}{100} \times 3,6161\dots = \\ &= 0,036161\dots \end{aligned}$$

O problema inverso, de “achar a geratriz”, é óbvio no caso de uma dízima periódica simples. Basta inverter as igualdades do tipo

$$\frac{71}{99} = 0,717171\dots$$

lendo-as da direita para a esquerda.

Para uma dízima periódica composta, a regra é mais elaborada. Como dizem os antigos compêndios, “a geratriz de uma dízima periódica composta é uma fração cujo numerador é igual à parte não periódica seguida de um período menos a parte não periódica; seu denominador é um número formado por tantos noves quantos são os algarismos periódicos, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos de um período”. Assim, por exemplo:

$$0,57421421\dots = \frac{57421 - 57}{99900} = \frac{57364}{99900}$$

A prova disto é bem conhecida: se  $x = 0,57421421\dots$  então

$$\begin{aligned} 100x &= 57,421421\dots = 57 + \frac{421}{999} = 57 + \frac{421}{1000-1} \\ &= \frac{57000 - 57 + 421}{999} = \frac{57421 - 57}{999}, \end{aligned}$$

$$\text{logo } x = \frac{57421 - 57}{99900}$$

Se  $q$  é primo com 10, sabemos que a fração própria irredutível  $p/q$  gera uma dízima periódica simples. Que se pode dizer a respeito do número de algarismos do período? Tomamos o menor número da forma  $99\dots9$  que seja múltiplo de  $q$ . Digamos que o número de noves aí seja  $m$ . Então temos  $n \cdot q = 99\dots9 = 10^m - 1$  donde  $10^m = nq + 1$ . Evidentemente,  $m$  é o número de algarismos do período. E a última igualdade

mostra que  $m$  é também o menor expoente tal que  $10^m$  dividido por  $q$  deixa resto 1. Esta caracterização do número de algarismos de período não é muito interessante porque não é prática. (Sua maior vantagem é mostrar que tal número depende apenas do denominador.) Mas conduz a uma informação valiosa, que é a seguinte. Em Teoria dos Números costuma-se indicar com o símbolo  $\varphi(q)$  o número de inteiros inferiores a  $q$  e primos com  $q$ . Evidentemente, se  $q$  é primo,  $\varphi(q) = q - 1$ . Noutros casos, temos  $\varphi(9) = 6$ ,  $\varphi(6) = 1$ ,  $\varphi(21) = 12$ . Prova-se então que se  $q$  é primo com 10 então  $10^{\varphi(q)}$  deixa resto 1 quando é dividido por  $q$ . Daí resulta que, se continuarmos chamando de  $m$  o menor número natural tal que  $10^m$  deixa resto 1 quando dividido por  $q$ , (ou seja,  $m$  é o número de algarismos periódicos da fração decimal igual a  $p/q$ ) então  $m$  é um divisor de  $\varphi(q)$ .

É fácil provar que  $\varphi(q)$  é múltiplo de  $m$ . Dividindo  $\varphi(q)$  por  $m$ , sejam  $a$  o quociente e  $r$  o resto. Temos  $\varphi(q) = am + r$ , com  $0 \leq r < m$ . Segue-se que

$$10^{\varphi(q)} = 10^{am} \cdot 10^r = (10^m)^a \cdot 10^r.$$

Como  $10^{\varphi(q)}$  e  $10^m$  deixam resto 1 quando dividido por  $q$ , segue-se que o mesmo ocorre com  $10^r$ . Mas, sendo  $r < m$ , isto só acontecerá se for  $r = 0$ .

Assim, o número de algarismos periódicos da dízima gerada por  $p/q$  é um divisor de  $\varphi(q)$ . Por exemplo, temos  $\varphi(13) = 12$ ,  $\varphi(23) = 22$  e  $1/13, 1/23$  geram dízimas com 6 e 22 algarismos no período, respectivamente. Outro exemplo: a fração  $1/29$  gera uma dízima cujo período tem um número de algarismos que divide  $\varphi(29) = 28$ . Tal número deve portanto ser 1, 2, 7, 14 ou 28. O leitor está convidado a decidir qual desses palpites é correto.

Para encerrar, uma observação sobre o primeiro lema. Ele pode ser demonstrado como consequência da fórmula da geratriz de uma dízima periódica simples. Com efeito, dado  $q$  primo com 10, desenvolvemos a fração  $1/9q$  como dízima periódica (simples) e tomamos a geratriz dessa dízima, obtendo uma fração do tipo  $n/99\dots 9$ . Por conseguinte  $1/9q = n/99\dots 9$ . Daí  $9n \cdot q = 99\dots 9$ , e, simplificando,  $n \cdot q = 11\dots 1$ . Isto diz que todo número  $q$ , primo com 10, tem um múltiplo formado apenas por algarismos 1 em sua representação decimal. Daí resulta que, seja qual for o algarismo  $a$ , podemos obter um múltiplo de  $q$  da forma  $aa\dots a$ .

Originalmente, eu pensava em apresentar esse lema como aplicação do processo de achar a geratriz de uma dízima periódica. Depois resolvi inverter a ordem e deduzir as propriedades das dízimas a partir do lema. A demonstração do primeiro lema foi-me comunicada por Ralph Costa Teixeira.

Outra alternativa para demonstrar o primeiro lema consiste em considerar as potências de 10 em vez dos números 9, 99, 999 etc. Como há infinitas potências e apenas um número finito de restos possíveis quando as dividimos por  $q$ , segue-se que há duas potências, digamos  $10^p$  e  $10^{m+p}$  que divididas por  $q$  deixam o mesmo resto. Logo  $10^{m+p} - 10^p = 10^p(10^m - 1)$  é múltiplo de  $q$ . Como  $q$  é primo com 10, segue-se que  $10^m - 1 = 99\dots 9$  é múltiplo de  $q$ .

## 9. $2 + 3\sqrt{-1}$ ou $3 + 2\sqrt{-1}$ : Qual destes números é o maior?

**Resposta:** nenhum dos dois, porque o corpo  $C$  dos números complexos não é ordenado.

Lembremos que um conjunto  $X$  diz-se *ordenado* quando está definida entre seus elementos uma relação de *ordem*, ou seja, uma relação binária  $x < y$ , com as seguintes propriedades:

O1) Dados arbitrariamente  $x$  e  $y$  em  $X$ , ou se tem  $x < y$ , ou  $y < x$ , ou  $x = y$ , cada uma dessas possibilidades excluindo as demais (tricotomia).

O2) Se  $x < y$  e  $y < z$  então  $x < z$  (transitividade).

Posta esta definição, cabe a pergunta: o que impede alguém de ordenar o conjunto  $C$  dos números complexos? Por exemplo, o que estará errado se tomarmos em  $C$  a "ordem do dicionário"? Esta ordem é a seguinte: dados os números complexos  $w = a + bi$  e  $z = c + di$  (onde  $i = \sqrt{-1}$ ), escreve-se  $w < z$  quando a parte real de  $w$  é menor do que a de  $z$  (isto é, quando  $a < c$ ) e, naturalmente, põe-se  $z < w$  se  $c < a$ . Quando, porém, se tem  $a = c$ , apela-se para a parte imaginária, ou seja, diz-se que  $w < z$  quando  $b < d$  e  $z < w$  no caso de  $d < b$ . As propriedades O1 e O2 são facilmente verificadas para a ordem do dicionário, logo ela torna o conjunto  $C$  dos números complexos um conjunto ordenado.

E agora?

Não há contradição. Qualquer conjunto pode ser ordenado (de muitas maneiras). Mas a resposta acima diz que  $C$  não é um *corpo ordenado*.

Entre os números complexos estão definidas duas operações, adição e multiplicação, as quais são comutativas, associativas e a multiplicação é distributiva relativamente à adição. Além disso, todo número complexo  $z$  possui um inverso aditivo  $-z$ , caracterizado pela igualdade  $-z + z = 0$ . E todo complexo  $z \neq 0$  tem um inverso multiplicativo  $z^{-1}$ , tal que  $zz^{-1} = 1$ . Por causa dessas propriedades diz-se que o conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos é um *corpo*.

O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais e o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais também são corpos em relação às operações de adição e multiplicação usuais.

Um *corpo ordenado* é um corpo no qual se definiu uma relação de ordem “compatível” com as operações de adição e de multiplicação, ou seja, com as seguintes propriedades:

CO1) Se  $x < y$  então  $x + z < y + z$  para todo  $z$  no corpo;

CO2) Se  $x < y$  então  $xz < yz$  para todo  $z > 0$  no corpo.

Por exemplo, a definição “ $x < y$  quando  $y - x$  é um número positivo” faz do corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais um corpo ordenado (o mesmo ocorrendo com o corpo  $\mathbb{Q}$  dos racionais).

Por outro lado, a ordem do dicionário, que definimos acima no conjunto  $\mathbb{C}$  dos números complexos, não faz de  $\mathbb{C}$  um corpo ordenado.

Com efeito, ela cumpre a condição CO1), ou seja, é compatível com a adição de números complexos, mas não cumpre a condição CO2).

Para comprovar esta afirmação, observemos primeiro que, na ordem do dicionário, os números complexos maiores do que zero são os que ou têm parte real positiva ou são da forma  $z = 0 + bi = bi$  com  $b > 0$ . Em seguida, notemos que vale  $2 + 3i < 3 + 2i$  na ordem do dicionário mas, multiplicando ambos os membros desta desigualdade pelo número complexo “positivo”  $2 - 3i$  obtemos  $13 < 12 - 5i$ , uma desigualdade falsa na ordem do dicionário.

A resposta que demos no início significa que NENHUMA relação de ordem entre os números complexos pode tornar  $\mathbb{C}$  um corpo ordenado. Como se prova isto? De modo simples, como consequência dos seguintes argumentos:

a) Num corpo ordenado, tem-se  $x > 0$  se, e somente se,  $-x < 0$ .

Com efeito, supondo  $x > 0$  e somando  $-x$  a ambos os membros, obtêm-se  $0 > -x$ , ou seja,  $-x < 0$ . Reciprocamente, se  $-x < 0$ , somando  $x$  a ambos os membros vem  $0 < x$ , ou seja,  $x > 0$ .

b) Num corpo ordenado, o quadrado de todo elemento não nulo é positivo, isto é,  $x \neq 0$  implica  $x^2 > 0$ .

Com efeito, sendo  $x \neq 0$ , deve-se ter  $x > 0$  ou  $x < 0$ . No primeiro caso, multiplicando ambos os membros da desigualdade  $x > 0$  pelo elemento positivo  $x$ , obtemos  $x^2 > 0$ . No segundo caso, segue-se de a) que  $-x > 0$ . Pelo primeiro caso, tem-se  $(-x)^2 > 0$ . Mas  $(-x)^2 = x^2$ , logo  $x^2 > 0$  em qualquer caso.

c) Em todo corpo ordenado, 1 é positivo, logo  $-1$  é negativo.

Com efeito, 1 é o quadrado de 1, logo  $1 > 0$  (por b)) e daí  $-1 < 0$  (por a)).

d) Nenhuma relação de ordem torna o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos um corpo ordenado.

Com efeito, temos  $-1 = i^2$ . Se  $\mathbb{C}$  fosse um corpo ordenado, o número  $-1$  seria negativo em virtude de c) e positivo em virtude de b), uma contradição.

## 10. O número $e$ : por quê?

A noção de logaritmo quase sempre nos é apresentada, pela primeira vez, do seguinte modo: “o logaritmo de um número  $y$  na base  $a$  é o expoente  $x$  tal que  $a^x = y$ ”.

Segue-se a observação: “os números mais freqüentemente usados como base de um sistema de logaritmos são 10, que é a base do nosso sistema de numeração, e o número  $e = 2,71828182\dots$ ”. Isto nos deixa intrigados.

De saída, uma pergunta ingênua: esta regularidade na seqüência dos algarismos decimais deste número persiste? Não. Apenas uma coincidência no começo. Um valor mais preciso seria  $e = 2,718281828459\dots$

Não se trata de uma fração decimal periódica. O número  $e$  é irracional, isto é, não pode ser obtido como quociente  $e = p/q$  de dois inteiros. Mais ainda: é um irracional *transcendente*. Isto significa que não existe um polinômio  $P(x)$  com coeficientes inteiros, que se anule para  $x = e$ .

Por que então a escolha de um número tão estranho como base de logaritmos? Mesmo depois de aprender que

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

a indagação ainda persiste: o que faz esse número tão importante? Isto é

o que procurarei responder aqui.

Talvez a resposta mais concisa seja que o número  $e$  é importante porque é inevitável. Surge espontaneamente em várias questões básicas.

Uma das razões pelas quais a Matemática é útil às Ciências em geral está no Cálculo (Diferencial e Integral), que estuda a variação das grandezas. E um tipo de variação dos mais simples e comumente encontrados é aquele em que o crescimento (ou decréscimo) da grandeza em cada instante é proporcional ao valor da grandeza naquele instante. Este tipo de variação ocorre, por exemplo, em questões de juros, crescimento populacional (de pessoas ou bactérias), desintegração radioativa, etc.

Em todos os fenômenos desta natureza, o número  $e$  aparece de modo natural e insubstituível. Vejamos um exemplo simples.

Suponhamos que eu empreste a alguém a quantia de 1 cruzeiro a juros de 100% ao ano. No final do ano, essa pessoa viria pagar-me e traria 2 cruzeiros: 1 que tomara emprestado e 1 de juros. Isto seria justo? Não. O justo seria que eu recebesse  $e$  cruzeiros. Vejamos por que. Se meu cliente viesse me pagar seis meses depois do empréstimo, eu receberia apenas  $1 + 1/2$  cruzeiros. Mas isto quer dizer que, naquela ocasião, ele estava com  $1 + 1/2$  cruzeiros meus e ficou com esse dinheiro mais seis meses, à taxa de 100% ao ano, logo deveria pagar-me

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ cruzeiros}$$

no fim do ano. Isto me daria 2,25 cruzeiros mas, mesmo assim, eu não acharia justo.

Eu poderia dividir o ano num número arbitrário  $n$  de partes iguais. Transcorrido o primeiro período de  $(1 \text{ ano})/n$ , meu capital emprestado estaria valendo  $1 + 1/n$  cruzeiros. No fim do segundo período de  $(1 \text{ ano})/n$ , eu estaria com  $(1 + 1/n)^2$  cruzeiros, e assim por diante. No fim do ano eu devia receber  $(1 + 1/n)^n$  cruzeiros. Mas, como eu posso fazer esse raciocínio para todo  $n$ , segue-se que o justo e exato valor que eu deveria receber pelo meu cruzeiro emprestado seria

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ cruzeiros.}$$

Mais geralmente, se eu empresto  $c$  cruzeiros a juros de  $k\%$  ao ano, transcorridos  $t$  anos eu devo receber de volta  $c \cdot e^{\alpha t}$  cruzeiros, onde  $\alpha =$

$k/100$ . Para maiores detalhes e outros exemplos, relativos a desintegração radioativa, crescimento populacional, etc, veja o livrinho "Logaritmos", de minha autoria.

Os logaritmos que têm base  $e$  são às vezes impropriamente chamados de "logaritmos neperianos". Na realidade, os logaritmos originalmente introduzidos por Napier tinham por base o número  $a = (1 - 10^{-7})^7$ . Aliás, para sermos mais exatos, o verdadeiro "logaritmo neperiano" do número  $x$  era igual a

$$10^7 \cdot \log_a \left(\frac{x}{10^7}\right).$$

É mais apropriado chamar *logaritmos naturais* aos logaritmos de base  $e$ . Euler os chamava de *logaritmos hiperbólicos*, pelo seguinte motivo.

Consideremos a função  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 1/x$ . Seu gráfico é um ramo de hipérbole equilátera.

Para cada número real  $a > 0$ , seja  $H_1^a$  a faixa de hipérbole formada pelos pontos do plano cujas coordenadas  $(x, y)$  satisfazem às desigualdades  $0 \leq y \leq 1/x$  e  $1 \leq x \leq a$  (se  $a \geq 1$ ) ou  $a \leq x \leq 1$  (se  $a \leq 1$ ).

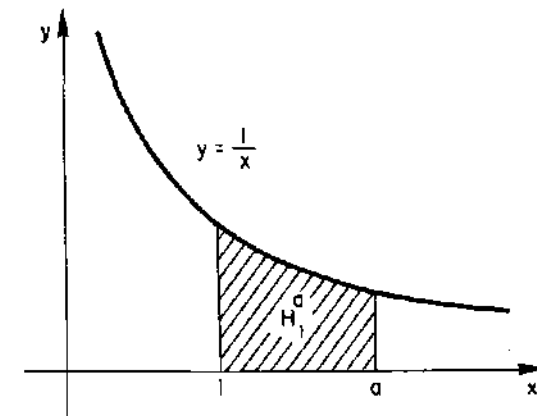


Figura 2.

A área de  $H_1^a$  é igual ao logaritmo natural de  $a$  se for  $a \geq 1$  e a esse logaritmo com sinal trocado se for  $a \leq 1$ . Em particular, o número  $e$  é a abscissa tal que  $H_1^e$  tem área igual a 1. O fato de que a área da faixa de hipérbole  $H_1^a$  é igual ao logaritmo natural de  $a$  pode ser tomado como definição de logaritmo e permite desenvolver a teoria, a partir daí,

de modo simples e elegante. Esta abordagem é adotada em nosso livro acima citado.

“O logaritmo hiperbólico pode ser caracterizado pela igualdade  $\log(1+x) = x$ , para todo número infinitamente pequeno  $x$ .”

Esta frase é de Euler. Evidentemente, na teoria habitual dos números reais, não há números infinitamente pequenos. O que Euler quis dizer é que  $\log(1+x)$  e  $x$  são “infinitésimos equivalentes” ou, de modo mais preciso, que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Esta igualdade só é verdadeira quando a base do sistema de logaritmos é o número  $e$ . Se tomarmos logaritmos numa base  $a$  teremos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = c,$$

onde  $c$  é o logaritmo natural de  $a$ .

Na verdade, esta fórmula é um caso particular do fato de que a derivada da função  $\log x$  é igual a  $c/x$ . Aqui tomamos  $\log x$  numa base  $a$  qualquer. Se a base for  $e$  então a derivada de  $\log x$  será  $1/x$ . (No caso geral,  $c = \log_e a$ .)

Mais uma vez, vemos que a base  $e$  é mais “natural”.

## 11. Quais são as raízes da equação $2^x = x^2$ ?

Duas dessas raízes são evidentes:  $x = 2$  e  $x = 4$ . Mas, traçando os gráficos das funções  $y = 2^x$  e  $y = x^2$ , constatamos que há uma raiz negativa, como se vê na figura abaixo.

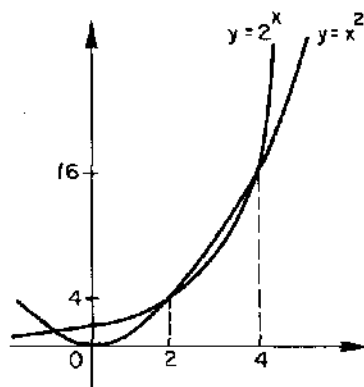


Figura 3.

A propósito dessa raiz negativa, o Professor Carlos Alberto Ceotto, de Vitória, ES, pergunta:

1<sup>ª</sup>) Tal raiz é um número racional ou irracional?

2<sup>ª</sup>) É possível obtê-la por um processo puramente algébrico?

O problema de determinar as raízes da equação  $2^x = x^2$  me tem sido proposto várias vezes, em diferentes ocasiões. A curiosidade que ele suscita talvez se deva ao fato de que as pessoas geralmente se sentem inseguras quando, para resolver uma equação, precisam apelar para os execráveis “métodos numéricos”.

Estamos condicionados a preferir métodos “algébricos”, fórmulas assim como a da equação do 2<sup>º</sup> grau, ou artifícios específicos para cada equação que enfrentamos. Ao adotarmos este ponto de vista, entretanto, estamos esquecendo duas coisas:

- Uma “fórmula fechada”, como a que existe para equações do 2<sup>º</sup>, 3<sup>º</sup> e 4<sup>º</sup> graus, é muitas vezes uma vitória ilusória; nem sequer nos dá uma idéia da ordem de grandeza das soluções;
- Todo processo de resolução de uma equação recai, mais cedo ou mais tarde, num cálculo numérico que dará o resultado final, com a aproximação desejada.

No caso em questão, a raiz negativa da equação  $2^x = x^2$  pode ser obtida, de modo simples, pelo método das aproximações sucessivas, como mostraremos no final desta seção. O resultado é  $x = -0,7666646959$ , com 10 algarismos decimais exatos.

Mas antes abordaremos as perguntas feitas pelo Professor Ceotto.

A primeira resposta é negativa, isto é, a raiz negativa da equação proposta é um número irracional. Isto se prova por absurdo.

Suponhamos que  $p/q$  fosse uma fração *irredutível* positiva tal que  $2^{-p/q} = (-p/q)^2$ . Eliminando denominadores e elevando ambos os membros, à potência  $q$ , teríamos então  $2^p \cdot p^{2q} = q^{2p}$ .

Ora, se  $p$  for ímpar, o primeiro membro desta última igualdade é um inteiro que contém um número ímpar de fatores iguais a 2 enquanto o segundo membro contém um número par (talvez zero) de fatores 2. Se, entretanto,  $p$  for par então  $q$  será ímpar, logo o primeiro membro é divisível por 2 mas o segundo não é. De qualquer maneira, tem-se uma contradição: não existe número racional  $r = p/q > 0$  tal que  $2^{-r} = (-r)^2$ .

A segunda pergunta equivale a indagar se a nossa solução negativa é um número algébrico.

Lembremos que um número (real ou complexo) se chama *algébrico* quando é raiz de alguma equação do tipo  $p(x) = 0$ , onde  $p(x)$  é um polinômio com coeficientes inteiros.

Por exemplo, todo número que se obtém partindo de números racionais e submetendo-os a um número finito de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes (de quaisquer índices) é algébrico.

Um número que não é algébrico chama-se *transcendente*. Por exemplo,  $\pi$  e  $e$  são números transcendentos.

A resposta à segunda pergunta também é NÃO. A raiz negativa da equação  $2^x = x^2$  não pode ser obtida por métodos puramente algébricos porque é um número transcendente.

Para provar isto, vamos ter que utilizar um resultado famoso, o Teorema de Gelfond-Schneider, que diz o seguinte:

Se  $a, b$  são números algébricos e  $b$  é irracional, então  $a^b$  é transcendente (exceto, evidentemente, quando  $a = 0$  ou  $a = 1$ ).

Ora, 2 é claramente algébrico e, como vimos, a raiz negativa  $x$  de nossa equação é irracional. Se  $x$  fosse algébrico então, pelo Teorema de Gelfond-Schneider,  $2^x$  seria transcendente. Mas se  $x$  é algébrico,  $x^2$  também será. Logo não pode ser  $2^x = x^2$ .

Agora vejamos como calcular numericamente a raiz negativa da equação  $2^x = x^2$ :

Consideremos a função  $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , definida por  $f(x) = 2^{-x/2}$ . Se o número  $a \geq 0$  for tal que  $f(a) = a$ , então  $-a$  será a raiz negativa de  $2^x = x^2$ .

Para resolver equações da forma  $f(x) = x$ , existe um método, chamado "das aproximações sucessivas", que funciona muito bem quando a derivada da função  $f$  cumpre uma condição do tipo  $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ , onde  $\lambda$  é constante.

No nosso caso, temos  $f'(x) = \frac{1}{2} \ln 2 \cdot e^{-x/2}$ . Olhando numa tabela, vemos que o logaritmo natural de 2 é 0,69. Logo, podemos escrever  $\lambda = \frac{\ln 2}{2}$  e ter certeza de que  $0 < \lambda < 1$ . Portanto  $|f'(x)| \leq \lambda < 1$  para todo  $x \geq 0$ .

O "método das aproximações sucessivas" opera assim: começamos como qualquer número  $x_0 \geq 0$ . A seqüência de aproximações sucessivas

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

convergir para um limite  $a \geq 0$ , o qual é a única solução da equação  $f(x) = x$ .

Então  $-a$  será a única solução negativa de  $2^x = x^2$ . Usando uma calculadora que tenha a tecla  $x^y$ , e começando com  $x_0 = 0$ , obtemos as aproximações sucessivas

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, x_2 = f(x_1) = 0,7071067811, \\ x_3 &= f(x_2) = 0,7826540277, \dots, \\ x_{18} &= 0,7666646959 \end{aligned}$$

e, a partir daí, vêm  $x_{18} = x_{19} = x_{20}$  etc.

Isto significa que aproximações melhores para a solução procurada só podem ser obtidas com 11 ou mais casas decimais, enquanto nossa calculadora só tem 10. Na verdade,  $x_{18}$  é uma excelente aproximação para tal raiz; até mesmo exagerada para a maioria dos usos.

Para terminar, talvez seja interessante apresentar uma interpretação gráfica do método das aproximações sucessivas. Traçamos o gráfico das funções  $y = 2^{-x/2}$  e  $y = x$ . A partir da origem do sistema de coordenadas, traçamos uma poligonal, cujos lados são alternadamente verticais e horizontais, e cujos vértices estão ora sobre a curva  $y = 2^{-x/2}$ , ora sobre a reta  $y = x$ , também alternadamente.

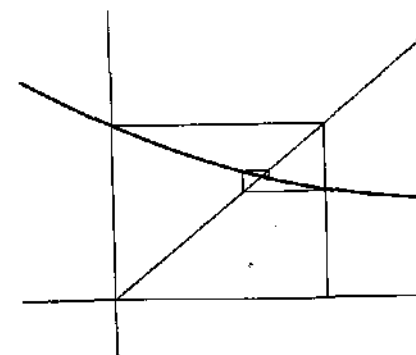


Figura 4.

Essa poligonal espirala em torno do ponto de encontro da curva  $y = 2^{-x/2}$  com a reta  $y = x$ . A abscissa desse ponto fornece a solução procurada. As abscissas dos vértices da poligonal são as aproximações sucessivas  $x_0, x_1, x_2, x_3$ , etc. Quanto maior for o índice  $n$ , mais próximo

está  $-x_n$  da solução negativa da equação  $2^x = x^2$ . Observe que as aproximações  $-x_n$  com índice  $n$  ímpar estão todas num mesmo lado da raiz procurada, enquanto as de índice par estão do lado oposto.

## 12. Números negativos têm logaritmo?

*Como Euler decidiu uma controvérsia entre Leibniz e Jean Bernoulli*

**Resposta:** Números (reais) negativos têm logaritmo complexo. Mais precisamente, todo número (real) negativo tem uma infinidade de logaritmos e nenhum deles é um número real.

Esta resposta sugere duas novas perguntas:

- 1<sup>a</sup>) Como se define o logaritmo (complexo) de um número real negativo?
- 2<sup>a</sup>) Seria possível organizar uma teoria de logaritmos de tal maneira que todos os números reais (positivos ou não) tivessem logaritmo real?

Para responder a essas perguntas, reexaminaremos os conceitos de logaritmo e exponencial.

Fixemos um número  $a > 0$  e consideremos a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = a^x$ . Sabemos que se  $n$  é um inteiro positivo então  $a^n$  é o produto de  $n$  fatores iguais, e  $a$ , enquanto  $a^{-n} = 1/a^n$ . Se  $p/q$  é um número racional com  $q > 0$  então  $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$ . Finalmente, se  $x = \lim r_n$  é um número irracional do qual  $(r_n)$  é uma seqüência de aproximações racionais então as potências  $a^{r_n}$  são valores aproximados de  $a^x$ , ou seja,  $a^x = \lim a^{r_n}$ . Esta é, em síntese, a definição da *função exponencial*  $f(x) = a^x$ .

As regras familiares  $a^1 = a$  e  $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$  significam que a função exponencial  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , dada por  $f(x) = a^x$ , tem as propriedades seguintes:

- E1.  $f(1) = a$ ;
- E2.  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ .

Na realidade,  $f(x) = a^x$  é a *única* maneira possível de se definir uma função contínua (ou uma função monótona)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  com as duas propriedades acima.

Evidentemente, se  $a = 1$  então  $f(x) = 1^x = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , logo a função exponencial não tem interesse neste caso. Por isso suporemos  $a \neq 1$ . Mais precisamente, tomaremos  $a > 1$ . Então  $f: x \mapsto a^x$  será uma bijeção crescente de  $\mathbb{R}$  sobre  $\mathbb{R}^+$ . (Se escolhêssemos  $a < 1$ ,  $f$  seria decrescente.) Assim,  $f$  possui uma função inversa  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ .

A função  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , inversa da exponencial de base  $a$ , chama-se *função logarítmica* de base  $a$ . Tem-se  $g(f(x)) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $f(g(y)) = y$  para todo  $y \in \mathbb{R}^+$ . Escreve-se  $g(y) = \log_a y$  ou (já que fixamos a base  $a$  de uma vez por todas)  $g(y) = \log y$ . Assim,  $\log a^x = x$  e  $a^{\log y} = y$ , por definição. Segue-se que  $\log a = 1$  e  $\log(xy) = \log x + \log y$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^+$ .

Portanto a função logarítmica  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tem as seguintes propriedades:

- L1.  $g(a) = 1$ ;
- L2.  $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$ .

Na verdade,  $g(x) = \log x (= \log_a x)$  é a *única* maneira de se definir uma função contínua (ou uma função monótona)  $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  com as propriedades L1 e L2.

Esta afirmação (que não provaremos aqui) implica que se podem deduzir todas as propriedades dos logaritmos a partir de L1 e L2. Um exemplo simples: L2 obriga que seja  $g(1) = 0$ . Com efeito,  $g(1) = g(1 \cdot 1) = g(1) + g(1)$ .

Costuma causar curiosidade o fato de a função logarítmica estar definida apenas para números reais positivos. Evidentemente, se insistirmos que essa função seja a inversa da exponencial,  $\log y$  só poderá ter sentido para valores positivos de  $y$ , pois estes são os únicos valores assumidos por  $a^x$ .

Mas poderíamos abrir mão da igualdade  $\log a^x = x$  e tentar simplesmente obter uma função contínua (ou uma função monótona)  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com as propriedades L1 e L2 [isto é,  $\varphi(a) = 1$  e  $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ]. Pela unicidade acima mencionada, teríamos necessariamente  $\varphi(x) = \log x$  quando  $x > 0$ .

De saída, uma dificuldade: se  $\varphi$  cumpre L1 e L2 então o valor  $\varphi(y)$  não pode estar definido para  $y = 0$ . Com efeito, neste caso teríamos  $\varphi(0) = \varphi(0 \cdot y) = \varphi(0) + \varphi(y)$ , donde  $\varphi(y) = 0$  para todo  $y$ , contradizendo L1.

Este é, entretanto, o único obstáculo. Removendo o zero do domínio, podemos definir uma função contínua  $\varphi: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , pela regra  $\varphi(x) = \log |x|$ .

Então valem L1 e L2. Na realidade,  $\varphi$  é a *única* extensão da função  $\log a \mathbb{R} - \{0\}$  que mantém essas duas propriedades. Com efeito, a validade

de L2 obriga

$$\begin{aligned} 0 &= \log 1 = \varphi(1) = \varphi((-1)(-1)) \\ &= \varphi(-1) + \varphi(-1), \text{ logo } \varphi(-1) = 0. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \varphi(-y) &= \varphi((-1)y) = \varphi(-1) + \varphi(y) \\ &= \varphi(y) = \log y = \log |-y| \quad \text{para todo } y > 0. \end{aligned}$$

Aparentemente o problema está resolvido. A regra  $\log y = \log(-y)$  permite estender a função logarítmica aos números negativos, de modo que seus valores continuem reais e ainda se tenha que o logaritmo do produto seja a soma dos logaritmos dos fatores. Infelizmente, porém, não vale mais a igualdade  $a^{\log x} = x$ . Temos apenas  $a^{\log x} = |x|$ .

O ponto onde chegamos retrata a situação em que se encontrava a teoria dos logaritmos na primeira metade do século 18.

Leibniz era de opinião que um número negativo não pode ter logaritmo real porque toda potência de expoente real de um número positivo  $a$  é um número positivo. Jean Bernoulli afirmava que números negativos têm logaritmo real. E mais ainda: que  $\log(-x) = \log x$ .

Seguiu-se uma longa controvérsia epistolar (em torno de 1712), onde cada um dos dois alinhava argumentos em favor do seu ponto de vista, assumindo posições mais e mais radicais, sem chegarem nunca a um acordo. Pelo que vimos acima, suas opiniões (ambas respeitáveis) pareciam irreconciliáveis.

Leibniz olhava para o logaritmo de  $x$  na base  $a$  como o expoente  $y$  tal que  $a^y = x$ . Jean Bernoulli insistia na validade da regra  $\log(xy) = \log x + \log y$ . O fato é que estas duas atitudes só podem ser compatíveis quando nos limitamos a considerar logaritmos de números positivos.

Foi aí que Leonard Euler, em 1749, escreveu um trabalho com o seguinte título: "Da controvérsia entre os Senhores Leibniz e Bernoulli sobre os logaritmos dos números negativos e imaginários". Nele, Euler esclareceu definitivamente a questão, formulando a teoria dos logaritmos nos termos que até hoje são aceitos e realizando o feito de conciliar os pontos de vista, aparentemente antagônicos, de Leibniz e Jean Bernoulli. Vejamos como.

Em primeiro lugar, Euler adotou como base de suas exponenciais e seus logaritmos o número  $e = 2,718281\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ .

Como vimos antes, esta escolha simplifica grandemente as fórmulas e facilita o desenvolvimento das idéias.

O ponto de partida para a teoria da exponencial e do logaritmo segundo Euler é a definição da potência  $e^z$ , onde o expoente  $z = x + yi$  é um número complexo. Sabe-se do Cálculo que para todo número real  $x$ , tem-se

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

as reticências significando que se trata de uma série infinita. A igualdade acima significa que a soma das  $n$  primeiras parcelas do segundo membro é um valor aproximado para  $e^x$  e que essa aproximação pode tornar-se tão precisa quanto se deseje, desde que  $n$  seja tomado suficientemente grande.

Conheciam-se também, desde muito antes de Euler, os desenvolvimentos em série de  $\sin x$  e  $\cos x$ , que são:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

O desenvolvimento em série de  $e^z$  para  $x$  real sugere de modo evidente a definição da exponencial  $e^z$ , onde  $z = x + iy$  é um número complexo. Basta pôr

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

No caso particular em que  $z = iy$  é um "imaginário puro", levando-se em conta os valores das potências sucessivas de  $i = \sqrt{-1}$ , uma manipulação bem simples mostra que se tem

$$e^{iy} = \left( 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \right) + i \left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right).$$

Logo  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ . Esta é a maravilhosa *fórmula de Euler*.

Dela resulta que, para  $z = x + iy$  arbitrário, tem-se  $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ , ou seja,  $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ .

Lembrando a representação geométrica dos números complexos, isto mostra que se  $z = x + iy$  então  $e^z$  é o ponto do plano cuja distância à

origem é  $e^z$  e o segmento que o liga à origem forma um ângulo de  $y$  radianos com o eixo das abscissas.

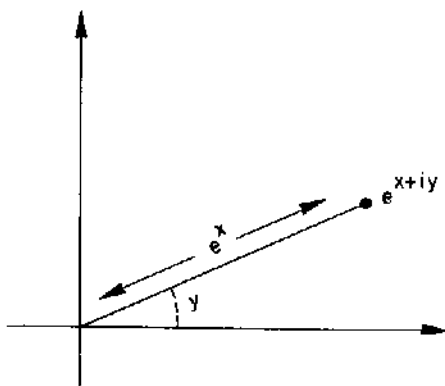


Figura 5.

Uma consequência imediata da fórmula  $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$  é que todo número complexo  $w \neq 0$  é da forma  $w = e^z$  para algum  $z$ , ou seja, que a função  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ , dada por  $\exp(z) = e^z$ , é sobrejetiva. Ela mostra também que  $\exp$  não é injetiva. Com efeito, tem-se  $e^z = e^{z'}$  se, e somente se,  $z = x + iy$  e  $z' = x + i(y + 2k\pi)$  onde  $k$  é inteiro.

Euler definiu o logaritmo de um número complexo  $w \neq 0$  como um número complexo  $z$  tal que  $e^z = w$ .

Se  $w = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = re^{i\theta}$  é a "forma polar" do número complexo  $w$  então  $w = e^{\log r + i\theta} = e^z$ , onde  $z = \log r + i\theta$ . Como o ângulo  $\theta$  está definido a menos de um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , e como  $r = |w|$ , temos  $\log w = \log |w| + (2k\pi + \theta)i$ , para qualquer  $k \in \mathbb{Z}$ .

Isto mostra explicitamente que o logaritmo de um número complexo tem uma infinidade de valores.

Citamos, a este respeito, um trecho do artigo de Euler acima mencionado:

"Vemos portanto que é essencial à natureza dos logaritmos que cada número tenha uma infinidade de logaritmos e que todos esses logaritmos sejam diferentes, não somente entre si mas também de todos os logaritmos dos demais números.

Ocorre com os logaritmos o mesmo que com os ângulos ou arcos de círculo; pois como a cada seno ou cosseno corresponde uma infinidade

de arcos diferentes, bem assim a cada número convém uma infinidade de logaritmos.

Mas é preciso aqui observar uma grande diferença: todos os arcos que correspondem ao mesmo seno ou cosseno são reais, mas todos os logaritmos de um mesmo número são imaginários, com exceção de um único se o número dado for positivo, e todos os logaritmos dos números negativos ou imaginários são, sem exceção, imaginários."

Por exemplo, como  $-1 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = e^{\pi i}$ , segue-se que  $\log(-1) = \pi i + 2k\pi i$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Mais geralmente, se  $x$  é qualquer número real positivo então  $-x = x(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = e^{\log x + \pi i}$ , logo  $\log(-x) = \log x + (2k + 1)\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Para nenhuma escolha de  $k$  se tem um valor real para  $\log(-x)$ .

Por outro lado, se  $x$  é ainda um número real positivo e  $e^y = x$  então temos também  $e^{y+2k\pi i} = x$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , logo todos os números da forma  $y + 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , são logaritmos de  $x$ . Apenas a escolha  $k = 0$  fornece um logaritmo real. Os demais são todos complexos.

Euler observa que, se interpretarmos o símbolo  $\log w$  como significando o conjunto de todos os números complexos  $z$  tais que  $e^z = w$ , então continua válida a fórmula

$$\log(vw) = \log v + \log w,$$

com o seguinte significado: um número complexo é um logaritmo de  $vw$  (isto é, pertence ao conjunto  $\log(vw)$ ) se, e somente se, é soma de um logaritmo de  $v$  com um logaritmo de  $w$ .

Para comprovarmos que Euler tinha razão quando dizia ser essencial à natureza dos logaritmos que cada número tenha uma infinidade deles, basta observar que a única função contínua  $\varphi: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\varphi(wz) = \varphi(w) + \varphi(z)$  e  $\varphi(e) = 1$  é a função definida por  $\varphi(w) = \log |w|$ .

Isto significa que, se insistirmos que cada número tenha um só logaritmo (mesmo complexo), então a regra  $e^{\log w} = w$  deixa de ser válida.

Esta é, em resumo, a solução genial de Euler: admitindo uma infinidade de logaritmos para cada número, tem-se  $e^{\log w} = w$ , como queria Leibniz, e vale ainda  $\log(wz) = \log w + \log z$ , conforme pretendia Jean Bernoulli.

**Observação:** Ao contrário do caso real,  $f(z) = e^z$  é apenas uma entre as infinitas possibilidades de definir uma função contínua  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$

tal que  $f(1) = e$  e  $f(w + z) = f(w) \cdot f(z)$ . Outras possibilidades são dadas pela fórmula  $f(z) = a^y \cdot e^z$ , onde  $a$  é um número real positivo escolhido arbitrariamente e  $z = x + yi$ .

### 13. Paradoxo?

Rafael Robson Negrão, de Londrina, Paraná, quer uma explicação para o paradoxo

$$-1 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

Esta questão é bem antiga, mas ressurgiu com incrível frequência, o que atesta o interesse por ela provocado. Para dar uma idéia de sua popularidade, ela ocupa lugar de destaque na lista de paradoxos publicada pela revista britânica "Mathematical Spectrum" (Vol. 14, 1981/82, pág. 33).

Na seqüência de igualdades acima, 4 são corretas mas uma é falsa (a terceira). Examinêmo-las, uma por uma:

$-1 = i \cdot i$ . CERTO. O número complexo  $i$ , por definição, tem a propriedade de que seu quadrado é igual a  $-1$ .

$i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ . CERTO. Como o quadrado de  $i$  é  $-1$ , é aceitável considerar  $i$  como raiz quadrada de  $-1$  e escrever  $i = \sqrt{-1}$ .

$\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1}$ . CERTO. É óbvio também, pois  $(-1)(-1) = 1$ .

$\sqrt{1} = 1$ . CERTO. Como é de praxe, quando  $x$  é um número real positivo (ou zero),  $\sqrt{x}$  significa o único número positivo (ou zero) cujo quadrado é igual a  $x$ .

$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}$ . ERRADO. A regra  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$  só é válida quando  $\sqrt{ab}$ ,  $\sqrt{a}$  e  $\sqrt{b}$  são números positivos ou zero.

Para se convencer da última afirmação acima feita, basta lembrar como se prova que  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ . Tem-se

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$$

e, por outro lado,  $(\sqrt{ab})^2 = ab$ . Assim  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  e  $\sqrt{ab}$  são números que têm o mesmo quadrado. Como o símbolo  $\sqrt{x}$  representa sempre um número  $\geq 0$  e como números maiores do que ou iguais a zero que têm o mesmo quadrado são iguais, concluímos que  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

No nosso caso específico, os números

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \sqrt{(-1)(-1)}$$

têm ambos quadrados igual a 1. Mas isto não quer dizer que eles sejam iguais. Com efeito,

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \quad \text{e} \quad \sqrt{(-1)(-1)} = 1.$$

Em suma, para ter-se  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  é preciso convencionar que o símbolo  $\sqrt{x}$  representa sempre um número positivo ou zero. Mas  $\sqrt{-1}$  não é positivo nem zero. Por isso não se pode escrever  $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}$ .

### 14. De onde vêm os nomes das funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, etc)? E por que o círculo trigonométrico tem raio igual a 1?

Esta pergunta foi feita por Francisco Antonio M. da Costa, de Maranguape, CE.

Quando estudei Trigonometria no colégio, meu professor ensinou que *seno* vem do latim *sinus*, que significa *seio*, volta, curva, cavidade (como nas palavras, enseada, sinuosidade). E usou o gráfico da função, o qual é realmente bastante sinuoso, para justificar o nome.

Mais tarde vim a aprender que não é bem assim. *Sinus* é a tradução latina da palavra árabe *jaib*, que significa *dobra*, bolso ou prega de uma vestimenta. Isto não tem nada a ver com o conceito matemático de seno. Trata-se de uma tradução defeituosa, que infelizmente durou até hoje. A palavra árabe adequada, a que deveria ser traduzida seria *jiba*, em vez de *jaib*. *Jiba* significa a corda de um arco (de caça ou de guerra). Uma explicação para esse erro é proposta por A. Aaboe ("Episódios da História Antiga da Matemática", página 139): em árabe, como em hebraico, é freqüente escreverem-se apenas as consoantes das palavras, o leitor se encarrega de completar as vogais. Além de "jiba" e "jaib" terem as mesmas consoantes, a primeira dessas palavras era pouco comum pois tinha sido trazida da Índia e pertencia ao idioma sânscrito.

Evidentemente, quando se buscam as origens das palavras, é quase inevitável que se considerem várias hipóteses e dificilmente se pode ter certeza absoluta sobre a conclusão. Há outras explicações para a palavra

seno. Uma delas é de que se trata de abreviatura *s. ins.* (semi-corda inscrita).

Quanto ao termo *tangente*, ele tem significado claro, pois  $\operatorname{tg} x = t/r$ , onde  $t$  é o segmento da tangente compreendido entre a extremidade do raio (um dos lados do ângulo  $x$ ) e o prolongamento do outro lado.

A *secante* do ângulo  $x$  é definida pela fórmula  $\operatorname{sec} x = s/r$ , onde  $s$  é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são o raio  $r$  e o segmento de tangente  $t$ . Como o segmento de reta  $s$  *corta* o círculo (secare = cortar em latim), a denominação *secante* se justifica.

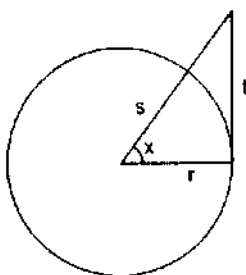


Figura 6.

Finalmente, cosseno, cotangente e cossecante são simplesmente o seno, a tangente e a secante do arco complementar.

O professor Francisco Antonio M. da Costa também quer saber por que o círculo trigonométrico tem raio 1. Normalmente as pessoas respondem a esta pergunta dizendo o seguinte: nas definições dadas acima para tangente e secante (bem como nas definições de seno e cosseno, que não demos aqui), figura sempre o raio  $r$  do círculo do denominador. Se supusermos  $r = 1$ , as fórmulas se simplificarão bastante.

Tal explicação deve ser complementada com a observação de que tomar  $r = 1$  corresponde a escolher o (comprimento do) raio como unidade de medida. Como todas as linhas trigonométricas são quocientes entre duas medidas, o valor de cada uma delas se mantém inalterado quando se passa de uma unidade para outra. Por isso não faz mal convencionar  $r = 1$ .

No fundo, o que ocorre é que na Geometria Euclidiana, embora haja uma unidade natural para medir ângulo (o radiano), não há uma unidade de comprimento que possa ser escolhida de modo canônico, isto é, in-

dependentemente de escolhas arbitrárias. Isto contrasta com a Geometria Hiperbólica (de Lobatchevski e Bolyai), na qual existe uma medida natural para os comprimentos, e portanto para áreas e volumes.

## 15. Quantas faces tem um poliedro?

Amphilophio Azevedo Netto, de São Paulo, SP, escreve com a seguinte dúvida:

“No número 3 da RPM, dois autores dizem que podemos considerar faces de um poliedro num mesmo plano e também que podemos considerar que todas as faces do poliedro  $P$  são triângulos.”

“Com esse raciocínio, poderíamos dizer que um cubo tem 12 faces? ou seriam 24? Como falar em número de faces de um poliedro se sempre podemos decompô-las em triângulos (se não o forem) ou em triângulos menores (se já forem triângulos)?”

“Afim, qual é a definição de poliedro?”

A resposta a estas indagações deve necessariamente começar pela última. Nada melhor, então do que repetir a definição dada anteriormente:

“Um *poliedro* é uma reunião finita de polígonos convexos, chamados as *faces* desse poliedro. Os lados desses polígonos chamam-se as *arestas* do poliedro e os vértices dos polígonos são também chamados os *vértices* do poliedro. Exige-se ainda que a interseção de duas faces quaisquer do poliedro seja uma aresta comum a essas faces, ou um vértice comum, ou seja vazia.”

A definição acima significa, em particular, que um poliedro só fica determinado quando são especificadas as suas faces. Normalmente, quando falamos em “cubo”, queremos nos referir ao poliedro formado por seis faces quadradas, com doze arestas, todas do mesmo comprimento. Se traçarmos em cada face do cubo  $C$  uma diagonal e assim a decomposermos em dois triângulos, obteremos um novo poliedro  $P$  com doze faces (triangulares), dezoito arestas e o mesmo número (oito) de vértices. Este novo poliedro  $P$  é uma *subdivisão* do cubo  $C$ . Estritamente falando, os poliedros  $C$  e  $P$  são diferentes. A relação de Euler para o primeiro poliedro é  $8 - 12 + 6 = 2$  e para o segundo é  $8 - 18 + 12 = 2$ .

Um modo de evitar dúvidas como a do Sr. Amphilophio Azevedo Netto é definir um poliedro como uma *coleção finita de polígonos convexos*, regularmente situados, na forma da definição que citamos acima. Procedendo assim, fica claro que quando se dá um poliedro não pode haver

ambigüidade sobre quais são as suas faces, pois estas são explicitamente especificadas.

## 16. Sobre um problema da Olimpíada.

A professora Marisa Girotti, de Jundiaí, SP, nos escreve: "Na 4<sup>a</sup> Olimpíada Brasileira de Matemática ocorreu a seguinte questão: Construa geometricamente o segmento de reta de comprimento  $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$ , conhecendo-se os segmentos  $a$  e  $b$ ."

A questão me foi proposta por um aluno que participou da prova. Acabei encontrando a seguinte solução: (i) Fatoro a soma  $a^4 + b^4$  da seguinte forma

$$a^2 = c \cdot m, \quad b^2 = c \cdot n, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

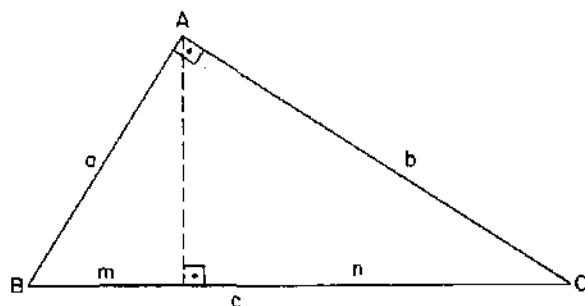


Figura 7.  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Os segmentos  $m$ ,  $n$  e  $c$  são construtíveis com régua e compasso por meio do triângulo  $ABC$ . Portanto:

$$\sqrt[4]{a^4 + b^4} = \sqrt[4]{c^2(m^2 + n^2)} = \sqrt{c \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}$$

que é a média geométrica entre  $c$  e  $\sqrt{m^2 + n^2}$ , portanto construtível.

Nossa controvérsia começou quando um colega apresentou uma solução onde admitia como dado um segmento unitário. Com auxílio do segmento unitário ele constrói  $a^2$  e  $b^2$ , em seguida  $x^2$  tal que  $(x^2)^2 = (a^2)^2 + (b^2)^2$ . Novamente usando o segmento unitário constrói  $x$ . A pergunta que lhe colocamos é:

É legítimo, nas condições do problema, admitir um segmento unitário?

Julgamos que a questão possa interessar a outros colegas do magistério".

A fim de tornar mais clara a discussão deste assunto, reproduzimos agora outra solução, de autoria de Fábio A. Barreto, de São Paulo, SP, a qual faz uso do segmento unitário. (Retirada do "Noticiário da Sociedade Brasileira de Matemática", outubro de 1982, pág. 56.) Seja

$$x = \sqrt[4]{a^4 + b^4} \quad \text{ou} \quad (x^2)^2 = (a^2)^2 + (b^2)^2. \quad (I)$$

Construamos primeiro  $a^2$  a partir de  $a$ . Seja  $AB$  um segmento unitário (onde a unidade pode ser fixada arbitrariamente). Levantemos  $BD \perp AB$  com  $BD = a$ . Tracemos uma reta perpendicular a  $AD$  que encontra o prolongamento de  $AB$  em  $C$ . Então, no triângulo  $ACD$ ,  $BC = a^2$ , logo  $BC = a^2$ . Do mesmo modo construímos  $b^2$ .

Usando a equação (I) e o Teorema de Pitágoras, construímos  $x^2$  a partir de  $a^2$  e  $b^2$ . Falta obter  $x$  a partir de  $x^2$ , usando o processo inverso da construção de  $a^2$  a partir de  $a$ .

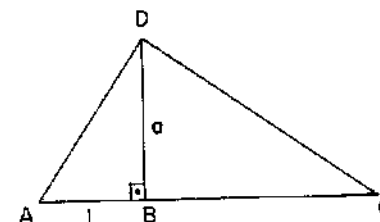


Figura 8.

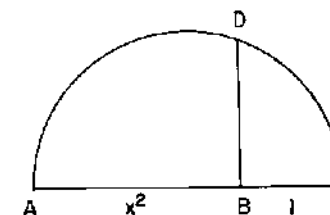


Figura 9.

Sejam  $A, B, C$  colineares com  $AB = x^2$ ,  $BC = 1$ . Tracemos a semi-circunferência de diâmetro  $AC$ . Seja  $D$  o ponto de interseção desta semi-circunferência com a perpendicular a  $AC$  levantada em  $B$ . Então

$ACD$  é um triângulo retângulo (por THALES), no qual vale  $BD^2 = x^2 \cdot 1$ , logo  $BD = x$ .

Para começar, devemos analisar o enunciado da questão. “Construa-a geometricamente” significa “com auxílio de régua (sem marcas) e compasso”. Os segmentos que a Professora Marisa, em sua elegante solução, chama de “construtíveis” são aqueles que podem ser obtidos a partir dos segmentos dados  $a$  e  $b$ , por meio de régua e compasso.

No problema, são dados os segmentos de reta  $a, b$  e pede-se para construir “geometricamente” um segmento  $c$  cujo comprimento seja  $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$ . Aqui surge a primeira fonte de dúvida: se  $a$  e  $b$  são segmentos de reta, que significado tem afirmar que um terceiro segmento  $c$  tem comprimento igual a  $\sqrt[4]{a^4 + b^4}$ ? Nesta expressão,  $a$  e  $b$  são tratados como se fossem números. O que o enunciado pede é um segmento  $c$  com a seguinte propriedade: se  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são os números reais que representam respectivamente as medidas de  $a, b$  e  $c$  relativamente a uma unidade de comprimento  $u$ , fixada arbitrariamente, então  $\gamma = \sqrt[4]{\alpha^4 + \beta^4}$ .

A solução da Profa. Marisa não faz uso explícito de uma unidade de medida mas só pode ter seu significado elucidado mediante o apelo a um segmento unitário. A solução de Fábio Barreto utiliza um segmento de medida  $u$ , que ele afirma (com razão) pode ser escolhido arbitrariamente.

A explicação é a seguinte: Se, em vez de  $u$ , escolhermos outro segmento  $v$  como unitário, poderemos escrever  $u = k \cdot v$  para significar que a medida de  $u$  em relação à nova unidade  $v$  é o número real  $k > 0$ . Então as medidas de  $a, b$  e  $c$  na unidade  $v$  são  $k \cdot \alpha, k \cdot \beta$  e  $k \cdot \gamma$  respectivamente. Se  $\gamma = \sqrt[4]{\alpha^4 + \beta^4}$  então  $k \cdot \gamma = \sqrt[4]{(k\alpha)^4 + (k\beta)^4}$ , logo a validade da condição estipulada pelo problema não depende da unidade de comprimento escolhida.

Esta independência acontece porque a expressão  $\sqrt[4]{\alpha^4 + \beta^4}$  é homogênea em relação às variáveis  $\alpha, \beta$ . Quer dizer, se substituirmos  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente por  $k \cdot \alpha$  e  $k \cdot \beta$  (onde  $k > 0$ ) a expressão fica multiplicada por  $k$ . (A rigor, deveríamos dizer “homogênea de grau 1”, mas continuaremos usando esta terminologia abreviada.)

O leitor observará que todas as fórmulas de Geometria que exprimem o comprimento de um segmento em função de comprimentos de outros são dadas por expressões homogêneas. Por exemplo,  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  (Teorema de Pitágoras) ou  $h = \sqrt{m \cdot n}$  (a altura baixada sobre a hipotenusa é a média geométrica das projeções dos catetos). Em contraste, as fórmulas

de áreas em função de segmentos são sempre dadas por expressões “homogêneas de segundo grau” em termos desses segmentos. Por exemplo a fórmula de Heron  $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  fornece a área  $A$  de um triângulo cujos lados têm comprimentos  $a, b$  e  $c$ , onde  $s = (a+b+c)/2$ . Se substituirmos  $a, b$  e  $c$  por  $k \cdot a, k \cdot b$  e  $k \cdot c$  a fórmula nos dará  $k^2 \cdot A$ . Isto é coerente com o fato de que, ao mudarmos de unidade, as áreas ficam multiplicadas pelo quadrado do fator mudança de escala.

Seria interessante perguntar o que ocorreria se o segmento pedido  $c$  tivesse seu comprimento dado por uma expressão não-homogênea em termos dos comprimentos de  $a$  e  $b$ . Por exemplo, consideremos o problema de construir geometricamente, a partir dos segmentos  $a$  e  $b$ , um segmento de reta  $c$  cujo comprimento seja  $a/b$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  forem respectivamente as medidas de  $a$  e  $b$  relativamente à unidade  $u$  então a medida de  $c$  será  $\alpha/\beta$ . Tomando outro segmento unitário qualquer  $v$ , com  $u = k \cdot v$ , as medidas de  $a$  e  $b$  nesta nova unidade serão  $k \cdot \alpha$  e  $k \cdot \beta$  respectivamente. Então a medida de  $c$  será  $k\alpha/k\beta = \alpha/\beta$ . O segmento  $c$  tem portanto a mesma medida, seja qual for a unidade escolhida! Isto é, evidentemente, um absurdo. Conseqüentemente, o problema de obter um segmento de comprimento  $a/b$  a partir de dois segmentos dados  $a$  e  $b$  não tem sentido.

Sabemos que a expressão do comprimento de  $c$  em função dos comprimentos de  $a$  e  $b$  deve necessariamente ser homogênea, cabe a pergunta: será a homogeneidade uma condição suficiente? Mostraremos que não.

Dados os segmentos  $a$  e  $b$ , tentemos obter geometricamente um segmento  $c$  cujo comprimento seja  $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$ . O raciocínio empregado para concluir, no caso acima, a impossibilidade de construir  $a/b$  não funciona porque  $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$  é uma expressão homogênea. Mesmo assim, o problema proposto não tem solução, mas agora por um motivo diferente e bem mais sutil.

Se temos que resolver um problema, nossa obrigação é considerar o caso mais geral possível dentro das condições do enunciado. Mas se queremos mostrar que o problema não tem solução, basta tomarmos um caso particular. Não havendo solução naquele caso, nossa tarefa acaba ali.

Consideremos então o caso particular em que  $a = b$ . Tomemos  $a$  (ou  $b$ ) como unidade de comprimento. Nosso problema consiste portanto em construir geometricamente um segmento de reta  $c$  que (em relação a esta unidade de comprimento fixada) tenha comprimento  $\sqrt[3]{2}$ . Se pudéssemos construir tal segmento, o cubo de aresta  $c$  teria para volume o dobro do

volume do cubo de aresta  $a$ !

A exclamação acima tem o seguinte motivo. O desafio de construir com régua e compasso (a aresta de) um cubo cujo volume seja o dobro do volume do cubo cuja aresta  $a$  é dada é uma questão milenar, conhecida como o “problema da duplicação do cubo”. Ele é um dos três célebres problemas propostos e não resolvidos pelos matemáticos da Escola Grega. (Os outros dois são a quadratura do círculo, e a triseção do ângulo.)

A duplicação do (volume de um) cubo é também conhecida como o “problema de Delos”. Delos é uma cidade grega que, por volta do ano 430 a.C., foi fustigada por uma epidemia. Seus habitantes foram ao oráculo e lhe perguntaram como escapar da praga. O oráculo respondeu: “Duplicando o altar de Apolo”. O altar tinha a forma de um cubo. Com muito cuidado, os habitantes de Delos construíram outro altar cúbico cuja aresta era o dobro da anterior, pensando que assim estavam duplicando o cubo, quando na realidade estavam multiplicando seu volume por oito. Eles voltaram ao oráculo, que lhe explicou o erro. A epidemia seguiu seu curso, desapareceu como costuma, mas o problema perdurou.

A solução do problema da duplicação do cubo só aconteceu muitos séculos depois, com a introdução de métodos numéricos na Geometria, isto é, com o surgimento da Geometria Analítica. Então viu-se que, *fixando um segmento de reta que consideramos unitário, só podem ser construídos com régua e compasso os segmentos cuja medida se exprime mediante um número finito de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada, estas operações sendo efetuadas a partir de números inteiros.* (Veja na seção 19, adiante, uma explicação sucinta.)

Em particular, não se pode construir com régua e compasso, a partir de um segmento  $a$ , de comprimento  $\alpha$ , um segmento  $c$  cujo comprimento seja  $\sqrt[3]{2\alpha}$ . Portanto, se forem dados os segmentos  $a$  e  $b$  não tem solução o problema de construir geometricamente um segmento de comprimento igual a  $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$ .

## 17. Novamente $0^0$ .

A redação da RPM recebeu recentemente a carta abaixo:

“Prezados Senhores:

No primeiro número dessa Revista, com a qual tenho a honra de haver colaborado, há um tópico assinado pelo Professor Elon Lages Lima, onde ele dá sua opinião a respeito do valor da expressão  $0^0$ .

Afirma aquele autor que  $0^0$  é uma expressão indeterminada, e alinha uma série de argumentos em favor dessa posição. Examinando-os, não se nota neles imperfeição lógica, nem lhes falta força persuasiva que nos convença da solidez da conclusão à qual conduzem.

Entretanto, mesmo confessando não ter percebido erro nas afirmações do Professor Elon, tampouco encontro falha em dois raciocínios que me levam a concluir que  $0^0 = 1$ . Eles são os seguintes:

**Primeiro.** Uma função  $f: X \rightarrow Y$ , definida no conjunto  $X$  e tomando valores no conjunto  $Y$ , é um subconjunto  $f$  do produto cartesiano  $X \times Y$  com as seguintes propriedades:

- (i) para todo  $x \in X$ , existe um par  $(x, y) \in f$  cujo primeiro elemento é  $x$ ;
- (ii) se os pares  $(x, y')$  e  $(x, y'')$ , ambos tendo  $x$  como primeiro elemento, pertencem a  $f$  então  $y' = y''$ .

Resulta desta definição formal de função que, quando  $X = \emptyset$  é o conjunto vazio, então existe uma única função  $f: X \rightarrow Y$ , a saber, o conjunto vazio  $f \subset X \times Y$ .

Ora, dados  $m$  e  $n$  inteiros positivos, a potência  $n^m$  é o número de funções definidas num conjunto com  $m$  elementos e tomando valores num conjunto com  $n$  elementos.

Se  $m \neq 0$ , não há função definida num conjunto com  $m$  elementos e tomando valores no conjunto vazio, logo  $0^m = 0$ , para  $m \neq 0$ .

Por outro lado, mesmo que seja  $n = 0$ , existe uma única função definida no conjunto vazio (que tem 0 elementos) e tomando valores num conjunto com  $n$  elementos. Logo  $n^0 = 1$  para todo  $n \geq 0$ . Em particular,  $0^0 = 1$ .

**Segundo.** O símbolo  $\binom{n}{p}$  representa o número de subconjuntos com  $p$  elementos num conjunto com  $n$  elementos.

Portanto  $\binom{0}{p} = 0$  se  $p \neq 0$  e  $\binom{n}{0} = 1$  pois em qualquer conjunto há um único subconjunto com 0 elementos, a saber, o conjunto vazio. Em particular  $\binom{0}{0} = 1 =$  número de subconjuntos vazios do conjunto vazio.

A fórmula do binômio de Newton se escreve então

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i, \quad \text{onde } n \geq 0 \text{ e } \binom{n}{0} = 1.$$

Tomando  $a = 1$  e  $b = -1$  obtemos

$$0^n = (1 - 1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i.$$

Em particular,  $n = 0$  dá:  $0^0 = 1$ .

Eis então a perplexidade em que me encontro: por um lado, estes dois últimos argumentos me conduzem inexoravelmente à igualdade  $0^0 = 1$ . Por outro lado, como já frisei anteriormente, a conclusão do Professor Elon de que  $0^0$  é uma expressão indeterminada está baseada em raciocínios que me parecem absolutamente corretos.

Como posso escapar desse dilema?

Atenciosamente,

Euclides Rosa

Colégio D. João VI

Rio de Janeiro, RJ.

Cabe-me respondê-la.

Em primeiro lugar, é-me grato registrar o modo objetivo e atencioso do Professor Euclides Rosa, cujos artigos na RPM tenho lido com muita atenção.

Noto ainda que, ao apresentar dois raciocínios que o “levam a concluir que  $0^0 = 1$ ”, ele não afirma estar *provando* esta igualdade. Nós, os leitores de sua carta, devemos entender seus argumentos do seguinte modo:

A definição usual da potência  $n^m$  não tem sentido quando  $m = n = 0$ . Entretanto, se adotarmos a *convenção*  $0^0 = 1$ , isto fará com que a igualdade “ $n^m =$  número de funções de um conjunto  $X$  com  $m$  elementos num conjunto  $Y$  com  $n$  elementos” continue válida quando  $X$  e  $Y$  são conjuntos vazios. (Primeiro argumento.) Além disso, a mesma convenção  $0^0 = 1$  fará com que a fórmula do binômio de Newton  $(a + b)^m$  continue válida para  $m = 0$  e  $a + b = 0$ . (Segundo argumento.)

Em apoio às observações do Professor Rosa, devo acrescentar que existem outras situações em Análise Combinatória onde há uma certa conveniência em adotar a regra  $0^0 = 1$ , a fim de estender um pouco mais o campo de validade de algumas fórmulas.

Nem por isso  $0^0$  deixa de ser uma expressão indeterminada.

Um caso parecido acontece na Teoria da Medida e da Integral, onde às vezes é conveniente escrever  $0 \times \infty = 0$ , a fim de que a fórmula da

área de um retângulo (base  $\times$  altura) continue válida quando a base do “retângulo” é toda uma reta e a altura se reduz a um ponto. (Veja P. Halmos, “Measure Theory”, página 1.)

Mesmo assim,  $0 \times \infty$  é uma expressão indeterminada.

Talvez seja interessante dar mais um exemplo.

Uma fórmula bem conhecida nos ensina que, se  $|x| < 1$ , a soma dos termos da progressão geométrica ilimitada cujo primeiro termo é 1 e cuja razão é  $-x$  é dada por

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots = \frac{1}{1 + x}. \quad (*)$$

A igualdade acima significa que, se fixarmos qualquer número  $x$  tal que  $-1 < x < 1$ , podemos fazer com que a soma dos  $n$  primeiros termos da soma à esquerda tenha um valor tão próximo quanto desejemos de  $1/(1 + x)$ , desde que o número  $n$  de parcelas seja tomado bastante grande.

Para valores de  $x$  fora do intervalo  $-1 < x < 1$ , o primeiro membro da igualdade (\*) é uma série *divergente*, isto é, as somas parciais

$$1 - x + x^2 - \dots + (-1)^{n+1} x^n$$

não tendem a nenhum limite quando  $n$  cresce indefinidamente. Por exemplo, se tomarmos  $x = 1$ , o primeiro membro da igualdade (\*) se torna igual a

$$1, 1 - 1, 1 - 1 + 1, 1 - 1 + 1 - 1, \text{ etc}$$

ou seja, assumem os valores 1 e 0 alternadamente, logo não se aproximam de nenhum limite.

Por outro lado, se tomarmos  $x = 1$  no segundo membro da igualdade (\*) obteremos o valor  $1/(1 + 1) = 1/2$ . Isto parece uma razão suficiente para se atribuir o valor  $1/2$  à soma infinita  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . E, realmente, matemáticos do peso de Euler, Leibniz e Daniel Bernoulli (antes de existir a noção de “série convergente”) propuseram  $1/2$  como soma da série infinita  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ .

Daniel Bernoulli, além do argumento acima, também usava a seguinte justificativa:

Se chamarmos de  $S$  a soma da série  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ , veremos imediatamente que  $S - 1 = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots = -S$ . Logo  $S - 1 = -S$ , donde  $S = 1/2$ .

Nem por isso  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  deixa de ser uma série divergente.

O argumento de Bernoulli prova apenas que, se fosse possível atribuir uma soma a esta série infinita de tal maneira que certas manipulações simples, como as acima, fossem permitidas, tal soma deveria ser igual a  $1/2$ .

Coisa análoga ocorre com os argumentos do Professor Rosa. O primeiro deles diz apenas que se for possível atribuir um significado ao símbolo  $0^0$  de modo que  $n^m$  continue igual ao número de funções de um conjunto de  $m$  elementos num conjunto com  $n$  elementos, então deve ser  $0^0 = 1$ . Interpretação semelhante pode ser dada ao segundo argumento.

Podemos raciocinar da mesma maneira com o símbolo  $0/0$ . (É curioso que os defensores de  $0^0 = 1$  não reivindiquem o mesmo direito para  $0/0$ .) Uma fração  $m/m$ , cujo numerador é igual ao denominador, vale sempre 1, desde que seja  $m \neq 0$ . Se convencionássemos que  $0/0 = 1$ , teríamos  $m/m = 1$ , para qualquer número  $m$ . É o mesmo princípio: atribui-se um significado à expressão  $0/0$  de tal maneira que a igualdade  $m/m = 1$  seja válida sem exceção, para qualquer  $m$ , igual a ou diferente de zero.

No entanto,  $0/0$  é uma expressão indeterminada.

Por quê?

Porque a expressão  $x/y$ , para valores muito pequenos de  $x$  e de  $y$ , não assume necessariamente valores próximos de 1.

Se nos derem de antemão um número arbitrário  $c$ , podemos escolher números  $x, y$  tão pequenos quanto desejemos, de tal forma que  $x/y = c$ . Ou seja: quando  $x$  e  $y$  tendem a zero, o quociente  $x/y$  pode tender para qualquer valor  $c$  dado a priori, tudo dependendo de como  $x$  e  $y$  são escolhidos.

O mesmo ocorre com  $x^y$ . Esta expressão tem um significado bem preciso quando  $x > 0$ , valendo  $x^y = e^{y \log x}$  (logaritmo natural). Quando  $y \neq 0$ , embora a fórmula  $e^{y \log 0}$  não tenha sentido, é natural escrevermos  $0^y = 0$  porque, fixado  $y \neq 0$ , a expressão  $x^y$  assume valores cada vez mais próximos de zero, à medida que atribuímos a  $x$  valores que tendem a zero. Por outro lado, não é possível raciocinar da mesma maneira quando  $x = y = 0$ .

Com efeito, quando se atribuem a  $x$  e  $y$  valores cada vez menores, que se aproximam de zero, a potência  $x^y$  não tende para nenhum limite bem determinado; tudo depende de como se escolhem  $x$  e  $y$ .

A figura seguinte exhibe as chamadas "curvas de nível" da função  $x^y$  quando  $0 < x < 1$  e  $0 < y < 1$ . O quadrado da figura é formado pelos pontos do plano cujas coordenadas  $x, y$  são ambas positivas e inferiores a 1.

No alto de cada curva está assinalado o valor (constante) da função  $x^y$  em todos os pontos da curva. Todas as curvas convergem para o ponto  $x = 0, y = 0$ . Logo,  $x^y$  não se aproxima de nenhum valor determinado quando  $x$  e  $y$  tendem a zero.

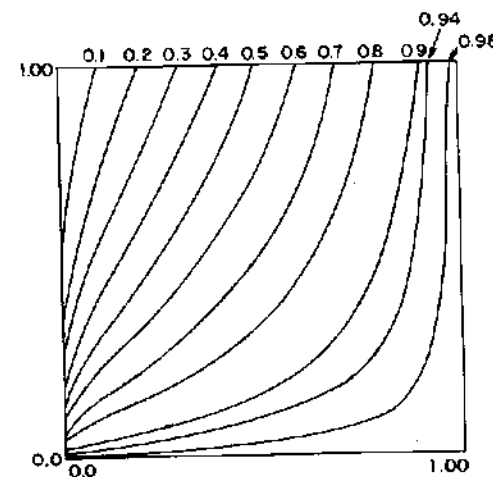


Figura 10. Curvas de nível da função  $x^y$ , para  $0 < x < 1$  e  $0 < y < 1$ .

Sobre cada uma das curvas ali desenhadas a função  $x^y$  assume um valor constante. Por acaso, esse valor é exatamente a abscissa do ponto em que a curva corta a reta horizontal  $y = 1$ .

Caminhando ao longo de qualquer uma dessas curvas teremos  $x^y = c$  (constante) para qualquer ponto de coordenadas  $x, y$  na curva. É natural que, ao atingirmos o vértice  $(0,0)$ , esperemos ainda ter  $x^y = c$ , ou seja,  $0^0 = c$ , com  $c \neq c$ . Isto significa que o limite de  $x^y$  quando  $x \rightarrow 0$  e  $y \rightarrow 0$  depende do modo como  $x$  e  $y$  tendem a 0. Por isso é que  $0^0$  é uma expressão indeterminada.

Agradeço a Jonas de Miranda Gomes pelo gráfico.

## 18. Deve-se usar máquina calculadora na escola?

O professor Douglas Leite Bicudo, de Campinas, SP, me propõe, sem ro-

deios, a seguinte questão: “Qual a sua opinião sobre o uso das calculadoras nos cursos ginásial e colegial?”

Darei uma resposta concisa e, em seguida, procurarei explicar as razões da minha posição.

Acho absolutamente necessário que a criança, ao fim do 4<sup>o</sup> ano primário, conheça de cor a tabuada e saiba efetuar manualmente as quatro operações com números inteiros, com frações ordinárias e com frações decimais. Uma vez conseguido este objetivo, não me oponho ao uso de máquinas, mais tarde, quando houver vantagem em usá-las.

O surgimento das calculadoras eletrônicas representa um enorme progresso na direção da eficiência, precisão e rapidez nas contas, em quase todos os segmentos da sociedade moderna. Seria impossível negar, ou mesmo tentar diminuir a ênfase desta afirmação, pois o sucesso comercial de tais máquinas prova eloquentemente sua utilidade.

Em conseqüência disto, é natural que se procure introduzir as calculadoras na Escola. Tal medida tem sido proposta e executada em nome de dois princípios bastante aceitáveis. O primeiro é que a Escola deve adaptar-se à vida atual, modernizar-se e adequar seus alunos à sociedade em que vivem, na qual vão lutar pela vida. O segundo é que o uso da máquina, liberando o aluno de longas, enfadonhas e desnecessárias tarefas, deixa-o com mais tempo para aprimorar sua capacidade de raciocinar e desenvolver-se mentalmente. Um corolário desta argumentação parece inevitável e tem, de fato, sido defendido como norma a ser adotada: devem ser abolidas a tabuada e as contas manuais. Use-se a máquina em lugar delas.

Mas não incorramos no erro de tirar conclusões apressadas. As calculadoras são extremamente eficazes para fazer contas, principalmente as longas, as repetidas e as difíceis (como extrações de raízes). Mas é bom que se tome conhecimento de algumas de suas desvantagens, como as seguintes:

1. Uma calculadora (salvo raros modelos especiais) só lida com frações decimais. Se comermos dois terços de um bolo, a calculadora nos dirá que sobra 0,3333333 do bolo. Num universo em que as operações aritméticas fosse todas feitas com auxílio dessas máquinas, não haveria lugar para frações ordinárias. Uma operação simples como  $3/7 - 2/7 = 1/7$  seria escrita assim:

$$0,42857142 - 0,28571428 = 0,14285714.$$

Evidentemente, a idéia de “um sétimo” é conceitualmente mais simples, mais fácil de escrever, mais exata e muito mais acessível ao entendimento de uma criança do que “0,14285714”. Logo, não creio haver dúvidas quanto à permanência das frações ordinárias entre os assuntos que nossos alunos aprendem nas escolas. (Bem entendido: não estamos propondo a supremacia absoluta das frações ordinárias sobre as decimais, nem que estas sejam abolidas da Escola. Cada uma delas tem seus méritos e sua hora de ser aprendida e usada.)

2. Os números que aparecem no mostrador de uma calculadora são valores aproximados. Daí resulta que várias das regras usuais de cálculo aritmético não são válidas para contas feitas com a máquina. Em particular, quando multiplicamos  $x$  por  $1/x$  não obtemos um resultado igual a 1, mas uma fração como 0,9999999. Pior do que isto: se  $n$  for um inteiro muito grande, o produto de  $x^n$  por  $(1/x)^n$  pode resultar mais diferente de 1 ainda. Por exemplo  $2^{32}$  vezes  $(1/2)^{32}$  na máquina dá 0,987.

3. Em Matemática e nas suas aplicações, mesmo as mais simples, há necessidade de se representarem os números não apenas com algarismos mas também com letras, seja em equações (como  $x/2 - 4x = 1$ ), seja em identidades (como  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ), seja em fórmulas (como  $A = \pi r^2$ ). As calculadoras não têm lugar para expressões literais, que precisam ser operadas manualmente. Podemos facilmente imaginar a perplexidade de um hipotético aluno que nunca aprendeu a tabuada, com uma calculadora na mão, tentando multiplicar  $2x + 3y$  por  $5x - 8$ , ou efetuar a subtração  $1/(a - b) - 1/(a + b)$ . Evidentemente, ele poderia fazer esta subtração sem saber tabuada mas nunca iria entender por que lhe ensinaram a fazer contas apenas com letras, sendo proibido operar manualmente com algarismos.

4. Mesmo que não existissem os defeitos apontados acima, haveria ainda a considerar fatores sócio-econômicos que inviabilizam o uso em larga escala das calculadoras. A grande maioria dos alunos de primeiro e segundo grau no Brasil não têm condições financeiras para comprar calculadoras ou baterias para fazê-las funcionar, nem para substituí-las quando quebram ou se perdem.

Memorizar a tabuada e as regras de cálculo aritmético, quando se é jovem e se tem a memória fresca, é adquirir uma habilidade a mais, aprender a efetuar um ato mecânico, como andar de bicicleta, que não atrapalha em nada mas pode ser útil em várias ocasiões. Isto sem falar no

aspecto educativo, na disciplina mental, na ordem e na atenção necessárias a essas operações, as quais podem vir a constituir-se em hábitos de trabalho quando transferidas a outras situações.

Mais tarde, principalmente a partir do segundo grau, quando já domina com proficiência as operações e suas regras, quando os cálculos numéricos são meros auxiliares no estudo de outras teorias, quando quer evitar uma grande e desnecessária perda de tempo com cálculos prolongados, o aluno pode vir a utilizar a calculadora, em seu próprio proveito, e em prol do melhor aproveitamento nos estudos. Mas é preciso primeiro verificar se isto não constitui mais uma discriminação contra os menos dotados financeiramente, que poderão ter rendimento inferior, não por culpa de sua deficiência intelectual mas por falta de condições para adquirir uma máquina.

## 19. O que é o número $\pi$ ?

A maneira mais rápida de responder a esta pergunta é dizer que  $\pi$  é a área de um círculo de raio 1. (Por exemplo, se o raio do círculo mede 1 cm, sua área mede  $\pi$  cm<sup>2</sup>.) Podemos também dizer que  $\pi$  é o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a 1.

Desde há muito tempo (cerca de 4000 anos!) notou-se que o número de vezes em que o diâmetro está contido na circunferência é sempre o mesmo, seja qual for o tamanho dessa circunferência.

Dito de outro modo, se o diâmetro mede um centímetro, um metro ou um côvado, a circunferência medirá respectivamente  $\pi$  centímetros,  $\pi$  metros ou  $\pi$  côvados.

Ainda de outra maneira: se uma circunferência tem comprimento  $C$  e diâmetro  $D$ , enquanto outra tem comprimento  $C'$  e diâmetro  $D'$ , então  $C/D = C'/D'$ . Este valor constante da razão  $C/D$  é um número, aproximadamente igual a 3,141592, o qual se representa pela letra grega  $\pi$ .

Os babilônios já tinham observado que o valor de  $\pi$  se situa entre  $3\frac{1}{8}$  e  $3\frac{1}{7}$ , ou seja  $\frac{25}{8} < \pi < \frac{22}{7}$ . Em frações decimais, isto dá  $3,125 < \pi < 3,142$ .

O conhecimento que as pessoas têm sobre o valor de  $\pi$  nem sempre melhorou com o tempo. Por exemplo, o Velho Testamento, que foi escrito cerca de 500 anos a.C. (embora baseado em tradições judaicas bem mais

antigas) contém um trecho segundo o qual  $\pi = 3$  (Primeiro Livro dos Reis, VII:23).

É natural que os redatores do Velho Testamento, mais preocupados com assuntos divinos do que com detalhes terrenos, não estivessem a par do que seus vizinhos babilônios já sabiam há mais de um milênio. Mas, em 1931, um cidadão americano de Cleveland, Ohio, publicou um livro segundo o qual o valor exato de  $\pi$  seria  $256/81$ , ou seja, 3,16. O livro em si, apesar de todas as heresias que contém, não causa admiração pois o número  $\pi$  sempre provocou irresistível atração aos amadores, pelos séculos afora. O curioso é que o valor  $256/81$  é o mesmo que foi obtido pelo escriba egípcio Ahmes, autor do famoso papiro de Rhind, escrito 2 mil anos antes de Cristo.

Desde Arquimedes, que obteve o valor  $\pi = 3,1416$ , matemáticos se têm ocupado em calcular  $\pi$  com precisão cada vez maior.

O inglês William Shanks calculou  $\pi$  com 707 algarismos decimais exatos em 1873. Em 1947 descobriu-se que o cálculo de Shanks errava no 527º algarismo (e portanto nos seguintes). Com auxílio de uma maquininha manual, o valor de  $\pi$  foi, então, calculado com 808 algarismos decimais exatos. Depois vieram os computadores. Com seu auxílio, em 1967, na França, calculou-se  $\pi$  em 500.000 algarismos decimais exatos e, em 1984, nos Estados Unidos, com mais de dez milhões (precisamente 10.013.395) algarismos exatos!

Esses cálculos de  $\pi$  com um número cada vez maior de algarismos decimais sugerem duas perguntas. A mais inocente seria: quantos algarismos serão necessários para se ter o valor exato de  $\pi$ ? Ora, sabe-se que  $\pi$  é um número irracional. Isto significa que nenhuma fração ordinária (e, conseqüentemente, nenhuma fração decimal finita ou periódica) pode exprimir exatamente o seu valor. Portanto, não importa quantos algarismos decimais tomemos, jamais obteremos o valor exato de  $\pi$  nem chegaremos a uma periodicidade (embora o erro cometido ao se substituir  $\pi$  por uma tal fração seja cada vez menor).

Outra pergunta que se pode fazer é: por que então tanto esforço para calcular  $\pi$  com centenas ou milhares de algarismos decimais? (O computador francês levou 28 horas e 10 minutos. Deus sabe quantos meses ou anos levou William Shanks.) Uma resposta é que esses cálculos existem pelo mesmo motivo que existe o "Livro dos Recordes de Guinness". Uma razão mais prática poderia ser a seguinte. Um computador, como toda

náquina, precisa ser testado contra possíveis defeitos, antes de começar a funcionar. Uma maneira de fazer é mandá-lo calcular alguns milhares de dígitos de  $\pi$  e fazê-lo comparar o resultado obtido com o que já se conhecia.

Mas, voltando às origens de  $\pi$ : desde quanto tal número é representado por essa letra grega, equivalente ao nosso “ $p$ ”? Nos tempos antigos, não havia uma notação padronizada para representar a razão entre a circunferência e o diâmetro. Euler, a princípio, usava  $p$  ou  $c$  mas, a partir de 1737, passou a adotar sistematicamente o símbolo  $\pi$ . Desde então, todo o mundo o seguiu. A verdade é que, alguns anos antes, o matemático inglês William Jones propusera a mesma notação, sem muito êxito. Questão de prestígio.

O número  $\pi$  surge inesperadamente em várias situações. Por exemplo, Leibniz notou que  $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \pi/4$  e Euler provou que a soma dos inversos dos quadrados de todos os números naturais é igual a  $\pi^2/6$ . A área da região plana compreendida entre o eixo das abscissas e o gráfico da função  $y = e^{-x^2}$  é igual a  $\sqrt{\pi}$ . Inúmeros outros exemplos poderiam ser mencionados, como o seguinte: a probabilidade para que dois números naturais, escolhidos ao acaso, sejam primos entre si é de  $6/\pi^2$ .

Desde que ficou clara a idéia de número irracional, começou-se a suspeitar que  $\pi$  era um deles. Euler acreditava na irracionalidade de  $\pi$  mas quem a provou foi seu conterrâneo Lambert, em 1761. Pouco depois, Euler conjecturou que  $\pi$  seria transcendente, isto é, não poderia ser raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros. (Por exemplo, é impossível encontrar inteiros  $a, b, c$  tais que  $a\pi^2 + b\pi + c = 0$ .) Este fato foi demonstrado em 1882 por Lindemann, 99 anos depois da morte de Euler.

Da transcendência de  $\pi$  resulta que o antigo problema grego da *quadratura do círculo* não tem solução.

Esse problema requeria que se construísse, com auxílio de régua e compasso, um quadrado cuja área fosse igual à de um círculo dado.

Tomando o raio do círculo como unidade de comprimento, isto equivale a pedir que se construa, com auxílio de régua e compasso, um segmento de comprimento igual a  $\sqrt{\pi}$  (lado do quadrado de área  $\pi$ ).

Vamos dizer “construir o número  $x$ ” para significar “construir, com régua e compasso, a partir de um segmento dado, tomado como unidade,

outro segmento de comprimento igual a  $x$ ”.

O problema da quadratura do círculo pede que se construa o número  $\sqrt{\pi}$ . Isto sugere a questão mais geral: quais os números reais que se podem construir?

Ora, as construções geométricas feitas com régua e compasso consistem em repetir, um número finito de vezes, as seguintes operações básicas:

- 1) Traçar a reta que une dois pontos dados;
- 2) Traçar a circunferência com centro e raio dados.

Um ponto, nessas construções, só pode ser obtido como intersecção de duas retas, de duas circunferências ou de uma reta com uma circunferência.

Considerando-se no plano um sistema de coordenadas cartesianas, uma reta é representada por uma equação do 1<sup>o</sup> grau  $y = ax + b$  e uma circunferência por uma equação do 2<sup>o</sup> grau  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . Assim, um número que se pode construir é sempre obtido como solução de um sistema de 2 equações a 2 incógnitas cujos graus são  $\leq 2$ . Prova-se, a partir daí, que se o número real  $x$  pode ser construído então  $x$  é o resultado de um número finito de operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada, efetuadas a partir de números inteiros.

Em particular, todo número  $x$  que pode ser construído (com régua e compasso) é algébrico, isto é, pode ser expresso como raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Como  $\pi$  é transcendente,  $\sqrt{\pi}$  também é. Segue-se que a quadratura do círculo não pode ser feita com régua e compasso apenas. Isto encerra a questão.

Infelizmente, nem todas as pessoas que gostam de Geometria, e que se interessam por construções com régua e compasso, sabem disso. E, pensando que o problema da quadratura do círculo ainda está em aberto, imaginam soluções engenhosas, que submetem a revistas e instituições onde se faz Matemática. Tais soluções são basicamente de 3 tipos:

- 1<sup>o</sup>) As que contêm erros devidos a raciocínios defeituosos;
- 2<sup>o</sup>) As que apresentam apenas uma solução aproximada para o problema;
- 3<sup>o</sup>) As que não se restringem ao uso de régua e compasso. (Por exemplo, empregando certas curvas cuja construção não pode ser efetuada apenas com esses dois instrumentos.)

Desde 1775 a Academia Real Francesa decidiu não mais aceitar para análise as inúmeras propostas de quadratura para ela enviadas. Mas, em

todas as partes do mundo, parece não desaparecerem nunca os quadradores.

Quando eu era estudante, na Universidade de Chicago, havia no Departamento de Matemática uma carta mimeografada que dizia mais ou menos o seguinte: “Prezado Senhor: Recebemos seu trabalho sobre a quadratura do círculo. Infelizmente estamos muito atarefados para examiná-lo. Caso o Sr. nos envie a quantia de 10 dólares, poderemos encarregar um dos nossos estudantes de pós-graduação de analisar seu trabalho e localizar os erros eventualmente nele contidos. Atenciosamente...” Por causa desta carta-padrão, vários colegas meus daquela época abocanharam alguns dólares sem fazer muita força.