

Primeira Lista de Álgebra Linear II - 2019.1
Professora Fátima

1. Diga se os conjuntos abaixo são ou não espaços vetoriais sobre $\mathbf{R}$. Em caso positivo, encontre uma base e determine a dimensão. Caso contrário, justifique.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, 3x - 2y + 4z = 0\}$

(b) $\{(t - 1, t + 1, t), t \in \mathbf{R}\}$

(c) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 0\}$

(d) $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + y + z = 1\}$

Lembrete 1: Dizemos que V é um espaço vetorial sobre o corpo K quando além do fechamento das operações de adição ($+: V \times V \rightarrow V$) e multiplicação por escalar ($\cdot: K \times V \rightarrow V$), as propriedades abaixo são satisfeitas:

i) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$

ii) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$

iii) $\exists 0 \in V$, tal que $u + 0 = u, \forall u \in V$ (elemento neutro).

iv) Para cada $u \in V, \exists -u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$

v) $s(u + v) = su + sv, \forall u, v \in V, \forall s \in K$

vi) $(s + t)v = sv + tv, \forall v \in V, \forall s, t \in K$

vii) $(st)v = s(tv), \forall v \in V, \forall s, t \in K$

viii) $\exists 1 \in K$, tal que $1v = v, \forall v \in V$

Lembrete 2: Dizemos que $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é uma base para o espaço vetorial V (sobre o corpo K) se e só se ocorrem as duas condições:

- (a) V é gerado por $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$, isto é, dado $v \in V$ existem escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tais que:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n$$

- (b) $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ é linearmente independente (LI), isto é,

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Se $V \neq \{0\}$, a dimensão de V é o número de elementos da base.

2. Verdadeiro ou falso? Justifique.

- (a) Seja $X = \{(2t, 0), t \in \mathbf{R}\} \cup \{(0, 3s), s \in \mathbf{R}\}$. Então X é um espaço vetorial.
- (b) Seja $X = \{t(1, -1, 2) + s(2, 0, 1) + r(3, -1, 4), r, s, t \in \mathbf{R}\}$. Então $X = \mathbf{R}^3$
- (c) O conjunto $\{(1, 1, -1), (-2, 3, -1), (-4, 11, -5)\}$ é linearmente dependente.
- (d) Seja $X = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x - y + z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3, x + 2y + z = 0\}$. Então X é um espaço vetorial real.

3. Seja $\beta = \{(3, 1), (-1, 2)\}$ Encontre v_β , ou seja, as coordenadas do vetor v na base β , para cada um dos vetores abaixo. Interprete geometricamente:

- (a) $v = (11, 13)$
- (b) $v = (-6, 5)$
- (c) $v = (3, 1)$
- (d) $v = (-1, 2)$

4. Seja $\beta = \{(3, 1), (-1, 2)\}$. Encontre M_ϵ^β , a matriz que muda os vetores da base β para a base canônica $\epsilon = \{(1, 0), (0, 1)\}$. Encontre também sua inversa, a matriz M_β^ϵ . Confira o exercício anterior usando estas matrizes.

5. Decida se cada uma das matrizes abaixo é invertível ou não. Calcule a inversa das matrizes invertíveis. Interprete geometricamente.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Decida se as funções abaixo são transformações lineares $T : U \rightarrow V$. Justifique. Em caso positivo, determine o núcleo e a imagem de T , denotados respectivamente por $N(T)$ e $Im(T)$.

(a) $T(x, y, z) = (xy, xz, yz)$, $U = R^3$, $V = R^3$

(b) $T(x, y) = (x + y, x + y)$, $U = R^2$, $V = R^2$

(c) $T(x, y) = (0, 2y)$, $U = R^2$, $V = R^2$

Definições:

$$N(T) = \{u \in U \text{ tal que } T(u) = 0\}$$

$$Im(T) = \{v \in V \text{ tal que } \exists u \in U, \text{ de modo que } v = T(u)\}$$

7. Determine uma transformação linear com autovalor 3 associado ao autovetor $(1,1)$ e cujo núcleo seja a reta $y = 2x$.
8. Apresente uma transformação linear tal que o núcleo seja gerado pelo vetor $(1,2)$ e cuja imagem seja a reta $y = x$. Encontre os autovalores e autovetores da transformação escolhida. Existe mais de uma possibilidade de resposta?
9. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ represente uma projeção ortogonal sobre a reta $y = -2x$. Determine o núcleo e a imagem desta transformação.
10. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ represente uma reflexão em torno da reta $y = -2x$. Determine o núcleo e a imagem desta transformação.
11. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que o vetor $(1,2)$ pertença ao núcleo da transformação e que $T(3, 5) = (1, 4)$. Calcule os autovalores e autovetores de T .

12. Cada uma das matrizes abaixo representa, na base canônica, uma transformação linear (TL). Determine o núcleo ($N(T)$), a imagem ($Im(T)$), os autovalores reais e os autovetores de cada TL. Busque uma interpretação geométrica para cada TL.

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (e) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que represente uma projeção ortogonal sobre o plano $x + 2y + z = 0$. Determine o núcleo e a imagem desta transformação.
- (f) Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que represente uma reflexão em torno do plano $x + 2y + z = 0$. Determine o núcleo e a imagem desta transformação.

13. Verdadeiro ou falso? Justifique

- (a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- (b) Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então o núcleo de T , denotado por $N(T)$, é um subespaço vetorial de U .
- (c) Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então a imagem de T é um subespaço vetorial de V .
- (d) Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então $\dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = \dim V$
- (e) Sejam v e w não nulos tais que $T(v) = \lambda v$ e $T(w) = \mu w$. Se $\lambda \neq \mu$ então v e w são linearmente independentes.

- (f) Se v e w são autovetores associados ao mesmo autovalor então qualquer combinação linear não nula deles também será autovetor associado a este mesmo autovalor.
- (g) Seja λ autovalor de A e seja P uma matriz invertível. Então λ é também autovalor de $B = P^{-1}AP$.
- (h) Se λ é autovalor de A associado ao autovetor v , então λ^2 é autovalor de A^2 associado a v .
- (i) Se λ é autovalor de A associado ao autovetor v e A é invertível, então $\frac{1}{\lambda}$ será autovalor de A^{-1} associado a v .
- (j) Se λ é autovalor de A e μ é autovalor de B então $\mu\lambda$ é autovalor de AB .
- (k) Se A e B são matrizes $n \times n$, com n autovalores distintos, e comutam. Então se λ é autovalor de A , λ é autovalor de B .
- (l) Se λ é autovalor de A e μ é autovalor de B então $\mu + \lambda$ é autovalor de $A + B$.

14. Encontre os autovalores e os autovetores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Verifique que o traço é a soma dos autovalores e que o determinante é igual ao produto dos autovalores.

15. Encontre os autovalores e os autovetores das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifique que o traço é a soma dos autovalores e que o determinante é igual ao produto dos autovalores.

16. Determine uma transformação linear com autovalor 3 associado ao autoespaço $x + y + z = 0$ e cujo núcleo seja a reta:

$$\{(t, 2t, t), t \in \mathbf{R}\}$$

Determine os autovalores e autovetores da transformação encontrada.
Definição: Chamamos de *autoespaço* associado a um dado autovalor,

ao conjunto de autovetores associados a este autovalor adicionado da zero do espaço vetorial em questão.

17. Encontre uma matriz diagonal D e uma matriz S invertível tal que $A = SDS^{-1}$, onde:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

18. Calcule A^{99} . Dica: diagonalize A .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19. Prove que em uma transformação $T : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ o autoespaço associado a um autovalor λ é um subespaço vetorial de V .
20. Questão 14 - Enade 2017
21. Questão 16 - Enade 2017
22. Questão discursiva 3 - Enade 2014
23. Questão 11 - Enade 2014